Lycée F. MISTRAL. **TS** 7 mai 2011

DEVOIR SURVEILLE COMMUN n°8.

EXERCICE 1 (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité) (Bac Antilles sept 09) 5 points

L'annexe est à rendre avec la copie.

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

On considère la surface S_1 d'équation : $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation : $z = xy + 2x$.

PARTIE A

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation: $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan $\mathscr{P}$ et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan $\mathscr{P}$.

En **annexe**, le plan $\mathscr{P}$ est représenté muni du repère (A ; $\vec{j}, \vec{k}$), où A est le point de coordonnées (2 ; 0 ; 0).

1. **a)** Déterminer la nature de l'ensemble E_1.

b) Déterminer la nature de l'ensemble E_2.

2. **a)** Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.

b) Dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.

PARTIE B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :

« *soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c.* »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection M(x ; y ; z) des surfaces S_1 et S_2 où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier.

On considère un tel point M(x ; y ; z).

1. **a)** Montrer que : $y(y - x) = x(2 - x)$.

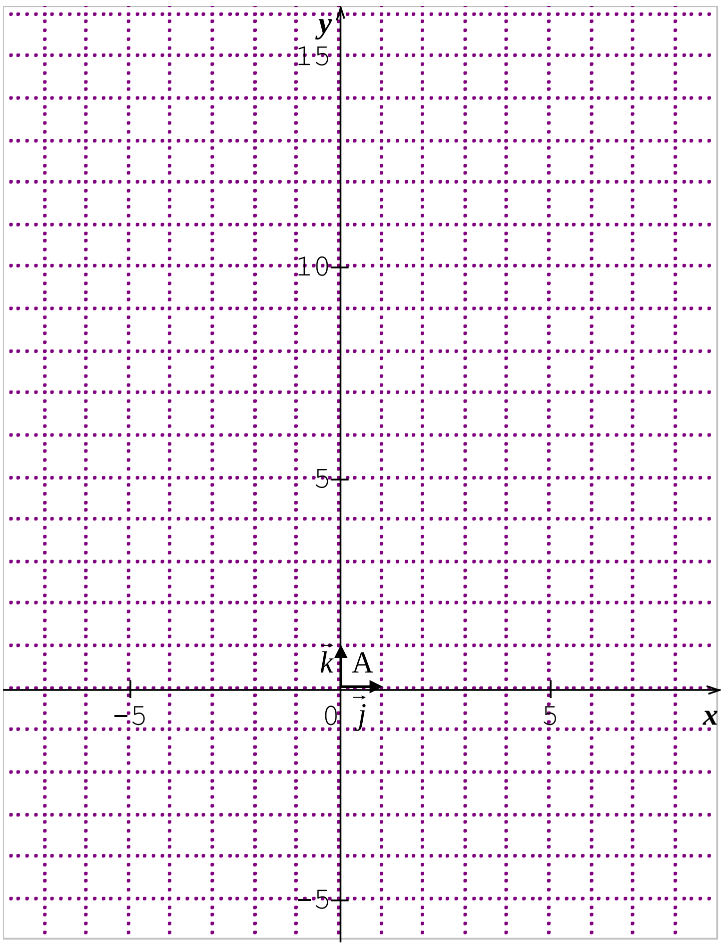
b) En déduire que le nombre premier x divise y.

2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.

b) En déduire les valeurs possibles de k.

3. Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la **PARTIE A**, question **2. b**).



EXERCICE 1 (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) Nelle Cal mars 11) 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle : $y' = ay$ où $a \in \mathrm{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K.e^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) :

$$y' = ay + b \text{ où } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow f - u \text{ est solution de l'équation différentielle : } y' = ay.$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que : $v(0) = 0$.

1. Démontrer que : $v(t) = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. **a)** Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

EXERCICE 2 (commun à tous les élèves) (Bac Nelle Calédonie mars 2011) 5 points

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :
– D l'évènement « le composant est défectueux » ;
– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;
– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. **a)** Dessiner un arbre pondéré.

b) Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.

c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

a) Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.

Pour les questions suivantes, on prendra : $\lambda = 0,225$.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

EXERCICE 3 <u>(commun à tous les élèves)</u> (Bac Antilles-Guyane juin 2008) **5 points**

On admet que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si Δ coupe $\mathscr{D}$ en le point I *et $\mathscr{D}'$ en le point* J, *la distance* IJ *est appelée distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.*

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $\mathscr{D}$ la droite des abscisses et $\mathscr{D}'$, la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

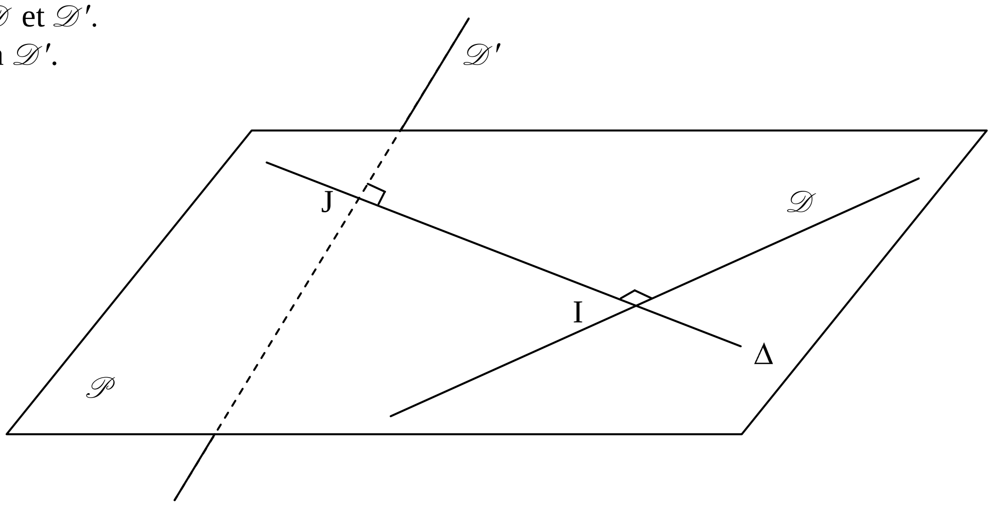
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\vec{j} + c\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.

3. a) Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

c) Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

d) En déduire la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.



EXERCICE 4 <u>(commun à tous les élèves)</u> (Bac Liban juin 2008) **5 points**

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que : $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$.

Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $(1 - i\sqrt{3}) + i(1 + i\sqrt{3})$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$.

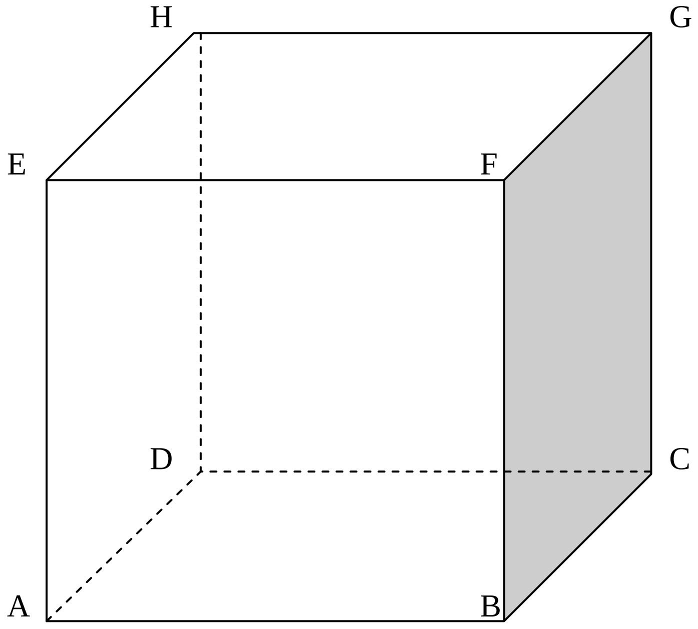
Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, représenté ci-après.

5. Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».

Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».


H
G
E
F
D
C
A
B