Exercice 1 (spécialité) : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la surface S_1 d'équation $z=x^2+y^2$, et la surface S_2 d'équation $z=x\,y+2x$.

Partie A : 1. a) E_1 est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de S_1. les coordonnés d'un point quelconque de E_1 vérifient donc le système :

$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x=2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x=2 \\ z=y^2+4 \end{cases}$. Dans le plan $\mathcal{P}$, $z=y^2+4$ est l'équation d'une parabole.

b) E_2 est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de S_2. les coordonnés d'un point quelconque de E_2 vérifient donc le système :

$\begin{cases} z=x\,y+2x \\ x=2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x=2 \\ z=2y+4 \end{cases}$. E_2 est donc une droite dans le plan $\mathcal{P}$.

2. a) voir figure à la fin de l'exercice.

b) Les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} x=2 \\ z=x^2+y^2 \\ z=2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=y^2+4 \\ y^2+4=2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=2y+4 \\ y(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=y^2+4 \\ y=0 \end{cases} \text{ou } \begin{cases} x=2 \\ z=y^2+4 \\ y=2 \end{cases}.$$

On obtient deux points : B(2 ; 0 ; 4) et C(2 ; 2 ; 8).

Partie B : 1. a) $\mathrm{M}\in S_1\cap S_2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x\,y+2x$ c'est-à-dire $y^2-x\,y=2x-x^2$ d'où $=y(y-x)=x(2-x)$.

b) x est premier ; il divise $x(2-x)$ donc divise $y(y-x)$.

Soit il divise y, soit il divise $y-x$. Mais s'il divise $y-x$, il divise $(y-x)+x$ donc y. On en déduit que x divise y.

2. On pose $y=k\,x$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

a) $y(y-x)=x(2-x)$ s'écrit alors $k\,x(k\,x-x)=x(2-x)$, donc $k\,x^2(k-1)=x(2-x)$.
x est premier donc non nul ; on peut simplifier par x. On obtient alors : $k\,x(k-1)=2-x$. x est premier, divise $k\,x(k-1)$, donc divise $2-x$. Comme il divise aussi x, il divise la somme $(2-x)+x=2$.

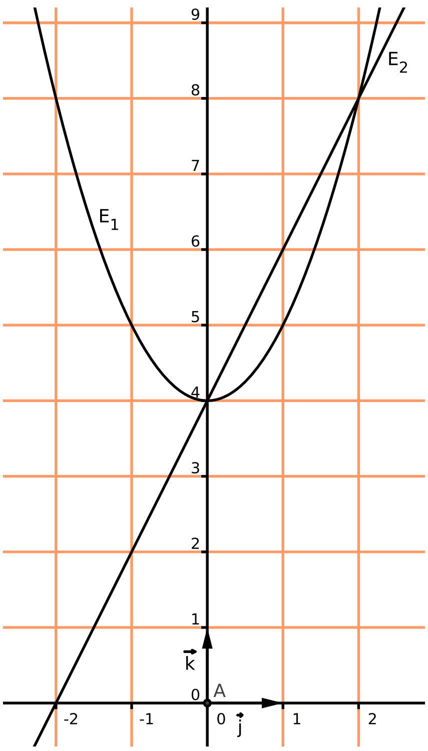
x divise donc 2. x est un diviseur de 2 et est premier, donc $x=2$.

b) Avec $x=2$, l'égalité $k\,x(k-1)=x(2-x)$ donne $k(k-1)=0$. On en déduit $k=0$ ou $k=1$.

3. Pour $k=0$, on obtient comme coordonnées $(2;0;4)$ qui sont les coordonnées du point B.

Pour $k=1$, on obtient comme coordonnées $(2;2;8)$ qui sont les coordonnées du point C.

Ainsi retrouve-t-on les résultats de la première partie, question 2.b.



Exercice 1 (Obligatoire)

1. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=0$, donc $\underbrace{u'(x)}_{y'}=a\times\underbrace{\left(-\frac{b}{a}\right)}_{y}+b\Leftrightarrow 0=-b+b$. Donc u est une solution de (E).

2. f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $f-u$ l'est aussi et quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $(f-u)(x)=f(x)-u(x)$, d'où

$(f-u)'(x)=f'(x)-u'(x)=f'(x)$.

Donc f est solution de (E) si et seulement si quel que soit $x\in\mathbb{R}$:

$f'(x)=a\,f(x)+b\Leftrightarrow f'(x)-u'(x)=a\,f(x)-a\,u(x)+a\,u(x)+b\Leftrightarrow$

$(f-u)'(x)=a(f(x)-u(x))+a\times\left(-\frac{b}{a}\right)+b\Leftrightarrow(f-u)'(x)=a(f(x)-u(x))-b+b\Leftrightarrow$

$(f-u)'(x)=a(f(x)-u(x))$, c'est-à-dire que $f-u$ est solution de l'équation différentielle $y'=a\,y$.

3. D'après le résultat initial donné on a donc $f(x)-u(x)=K\mathrm{e}^{ax}, K\in\mathbb{R}$, donc :

$f(x)=K\mathrm{e}^{ax}+u(x)=K\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$.

Partie B: 1. L'équation différentielle peut s'écrire : $v'(t)=3-\frac{1}{10}v(t)$.

On reconnaît une équation différentielle résolue dans la partie A avec $a=-\frac{1}{10}$ et $b=3$.

On a donc : $v(t)=K\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}-\frac{3}{\frac{-1}{10}}=K\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}+30$.

En utilisant la condition initiale $v(0)=0\Leftrightarrow K+30=0\Leftrightarrow K=-30$, on obtient finalement : $v(t)=30(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}})$.

2. a) On sait que la fonction v est dérivable sur $[0;+\infty[$ et sur cet intervalle :

$v'(t)=-30(-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}})=3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}>0$, car on sait que $\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}>0$ pour tout réel t. La fonction v est donc croissante sur $[0;+\infty[$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}v(t)=30$. Il faut donc résoudre l'inéquation dans $[0;+\infty[$, $v'(t)<0,1$, soit, d'après l'équation différentielle $3-\frac{1}{10}v(t)<0,1\Leftrightarrow 3-\frac{1}{10}\times 30\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)<0,1\Leftrightarrow 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}<0,1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}<\frac{0,1}{3}\Leftrightarrow$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $-\frac{t}{10}<\ln\left(\frac{1}{0,3}\right)\Leftrightarrow t>-10\ln\left(\frac{1}{0,3}\right)$.

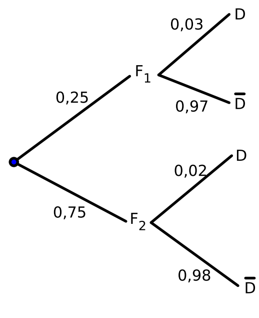
Comme $-10\ln\left(\frac{1}{0,3}\right)\approx 34,01$, la vitesse est donc stabilisée à partir de la 35ème seconde.

4. On a donc $d_{35}=\displaystyle\int_0^{35}v(t)\,\mathrm{d}t$. On a $v(t)=30-30\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$, dont une primitive sur $[0;+\infty[$ est : $V(t)=30t+300\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$.

D'où : $d_{35}=[V(t)]_0^{35}=30\times 35+300\mathrm{e}^{-\frac{35}{10}}-\left(30\times 0+300\mathrm{e}^{-\frac{0}{10}}\right)=1050+300\mathrm{e}^{-\frac{35}{10}}-300=750+300\mathrm{e}^{-\frac{35}{10}}\approx 759,06\approx 759,1$(m).

Exercice 2

1. a) Arbre pondéré :



b) On a $p(\mathrm{D}\cap\mathrm{F}_1)=p(\mathrm{F}_1\cap\mathrm{D})=0,25\times 0,03=0,007\,5$. De même $p(\mathrm{F}_2\cap\mathrm{D})=0,75\times 0,02=0,015$.

Donc $p(D)=p(\mathrm{F}_1\cap\mathrm{D})+p(\mathrm{F}_2\cap\mathrm{D})=0,007\,5+0,015=0,022\,5$.

c) On sait que $p_{\mathrm{D}}(F_1) = \frac{p(D \cap F_1)}{p(D)} = \frac{0,0075}{0,0225} = \frac{1}{3}$.

2. La probabilité d'avoir k composants défectueux sur 20 est :

$p(X = k) = \binom{20}{k} 0,0225^k \times (1 - 0,0225)^{20-k}$. (répétition d'épreuves de Bernoulli avec $n = 20$ et $p = 0,0225$.)

La probabilité d'avoir au moins deux composants défectueux est égale à :

$p(X \geqslant 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,9775^{20} - 20 \times 0,0225 \times 0,9775^{19}$.

Donc $p(X \geqslant 2) \approx 0,0736 \approx 0,074$.

3. a) On sait que $p(X > 5) = 1 - p(X \leqslant 5) = 1 - \int_0^5 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_0^5 = \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,325$.

Or $\mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,325 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0,325 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-\ln 0,325}{5} \approx 0,2247 \approx 0,225$.

b) $p(X < 8) = \int_0^8 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{0,225 \times 8} \approx 0,835$. D'où $p(X \geqslant 8) = 1 - p(X < 8) \approx 1 - 0,835 \approx 0,165$.

c) La loi étant une loi de durée de vie sans vieillissement, la probabilité est $p(X > 5) = 0,325$.

Exercice 3

La droite $\mathcal{D}'$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 3; -1)$ lequel n'est manifestement pas colinéaire au vecteur $\vec{i}$, vecteur directeur de la droite des abscisses $\mathcal{D}$: donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

Prouvons à présent qu'elle ne sont pas sécantes.

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ étant : $\begin{cases} x &= u \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}, u \in \mathbb{R}$,

on a pour $M(x; y; z)$: $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Leftrightarrow$ il existe $(u; t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} u &= -t \\ 0 &= 3 + 3t \\ 0 &= 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + t &= 0 \\ t &= -1 \\ t &= 1 \end{cases}$.

Les deux dernières équations étant incompatibles, le système n'a pas de solution et donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont donc **non coplanaires**.

2. Le vecteur $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ sera un vecteur directeur de Δ si $\vec{w} \perp \vec{i}$ et $\vec{w} \perp \vec{u}$, i.e. si $a = 0$ et $-a + 3b - c =$, i.e. encore si $a = 0$ et $c = 3b$.

Prenons $b = 1$. Alors le vecteur $\vec{w} = \vec{j} + 3\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ.

3. a) Soit $M(u; 0; 0)$ un point de $\mathcal{D}$. On a alors : $-3y + z = -3 \times 0 + 0 = 0$. Donc $M \in \mathcal{P}$ et ceci quel que soit le point M de $\mathcal{D}$. Donc le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathcal{D}$.

b) En tant que point de $\mathcal{D}'$ le point J a pour coordonnées $(-t; 3 + 3t; 1 - t)$. Pour obtenir t exprimons que J appartient au plan $\mathcal{P}$: $-3y + z = 0 \Leftrightarrow -3(3 + 3t) + (1 - t) = 0 \Leftrightarrow -10t = 8 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{5}$.

On en déduit que les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathcal{D}'$ et du plan $\mathcal{P}$ sont $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

c) Désignons par Δ_1 la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{w}$. Elle a pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x &= \frac{4}{5} \\ y &= \frac{3}{5} + v \\ z &= \frac{9}{5} + 3v \end{cases}, v \in \mathbb{R}$. Étudions l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ_1. On a pour $M(x; y; z)$:

$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \cap \Delta_1 \Leftrightarrow$ il existe$(u; v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} u &= \frac{4}{5} \\ 0 &= \frac{3}{5} + v \\ 0 &= \frac{9}{5} + 3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u &= \frac{4}{5} \\ v &= \frac{3}{5} \\ v &= \frac{3}{5} \end{cases}$.

Donc la droite Δ_1 est sécante à $\mathcal{D}$ en un point I de coordonnées $\left(\frac{4}{5}; 0; 0\right)$. Montrons que Δ_1 c'est Δ.

La droite Δ_1 a pour vecteur directeur $\vec{w}$, donc elle est parallèle à Δ, donc elle est orthogonale à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

D'autre part elle rencontre $\mathcal{D}$ en I et $\mathcal{D}'$ en J. Donc Δ_1 est une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Enfin, d'après **1.** $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites non coplanaires, et on a admis qu'il existe dans ce cas une unique droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Donc Δ_1 est bien la **perpendiculaire commune** Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Le vecteur $\vec{\text{IJ}}$ ayant pour coordonnées $\left(0; \frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$, on en déduit que la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ est :

$d(\mathcal{D}; \mathcal{D}') = \text{IJ} = \frac{3}{5} \times \sqrt{0^2+1^2+3^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Exercice 4

z^{100} a un argument égal à $\frac{100\pi}{3}$ ou encore $\frac{96\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 32\pi + \frac{4\pi}{3} = 16 \times 32\pi + \frac{4\pi}{3}$ soit encore un argument de $\frac{4\pi}{3}$. Ce nombre n'est donc pas un réel.

Proposition 1 : z^{100} est un nombre réel . Faux.

Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$.
$\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|1-z|} = 1 \Leftrightarrow$ OM = AM si A est le point d'affixe 1. L'ensemble (E) est donc l'ensemble des points équidistants de O et de A : c'est la médiatrice de [OA] et comme les deux points appartiennent à l'axe des abscisses, cette médiatrice est parallèle à l'axe des ordonnées.

Proposition 2 : l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels . Faux.

Si O$'$ est l'image de O par r, on a

$z_{\text{O}'} - \left(1+\text{i}\sqrt{3}\right) = \text{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left[z_{\text{O}} - \left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)\right] \Leftrightarrow z_{\text{O}'} = 1+\text{i}\sqrt{3} - \text{i}\left(-1-\text{i}\sqrt{3}\right) = 1+\text{i}\sqrt{3}+\text{i}-\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Proposition 3 : l'image du point O par la rotation r a pour affixe $\left(1-\sqrt{3}\right)+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$. Vrai.

$z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[z+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[z+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[z+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^2 = \text{i}^2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Cette équation a deux solutions : $-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $-\cos\frac{\pi}{5}() - \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ qui ont toutes deux un module égale à 1.

Proposition 4 : l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1. Vrai.

En prenant comme repère orthonormal $\left(\text{D}; \overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$, on a A(1 ; 0 , 0), G(0 ; 1 ; 1), donc $\overrightarrow{\text{AG}}(-1;1;1)$; $\overrightarrow{\text{DB}}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{\text{DE}}(1;0;1)$. Or $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{DB}} = -1+1+0 = 0$ et $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{DE}} = -1+0+1 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) : il est donc normal à ce plan.

Proposition 5 : le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (BDE) . Vrai.

Proposition 6 : les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires . Faux. On peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{EB}} \cdot \overrightarrow{\text{ED}}$ et montrer qu'il n'est pas nul (en fait égal à 1. Le plus simple est de dire que [EB], [ED] et [BD] sont des diagonales de carrés de même côté : le triangle EBD est équilatéral et les droites (EB) et (ED) ne sont pas perpendiculaires.