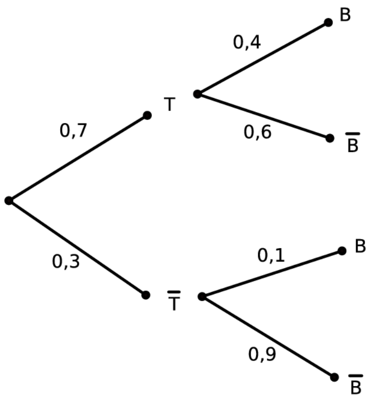
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 TERMINALE S 3

EXERCICE 1 :
Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :
• 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
• parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio ;
• parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.
On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :
T l'événement « le ménage pratique le tri sélectif »;
B l'événement « le ménage consomme des produits bio ».
1. L'arbre pondéré :



2. a) La probabilité de l'événement « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio » est $p(T \cap B) = p_T(B)p(T) = 0{,}4\times0{,}7 = 0{,}28$.
b) La probabilité que le ménage consomme des produits bio est
$p(B) = p(T \cap B) + p(\overline{T} \cap B) = 0{,}28 + 0{,}3\times0{,}1 = 0{,}31$.
3. La probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio est $p_B(T) = \dfrac{p(T\cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}31} = \dfrac{28}{31} \simeq 0{,}9$ arrondie au centième.
4. Les événements T et B ne sont pas indépendants puisque $p(T \cap B) = 0{,}28$ et $p(B)p(T) = 0{,}31\times0{,}7 = 0{,}217$, ces résultats ne sont pas égaux.
5. La probabilité de l'événement $T \cup B$ est $p(T \cup B) = p(T) + p(B) - p(T \cap B) = 0{,}7 + 0{,}31 - 0{,}28 = 0{,}73$;
c'est la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif ou consomme des produits bio.

6. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement écocitoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).
Soit S la somme d'argent reçue par un ménage sur une année.
a) Les valeurs prises par la variable aléatoire S sont 0, 10, 20, 30.
On a $p(S = 0) = p((\overline{T} \cap \overline{B}) = 0{,}3\times0{,}9 = 0{,}27$; $p(S = 10) = p((\overline{T} \cap B) = 0{,}3\times0{,}1 = 0{,}03$;
$p(S = 20) = p((T \cap \overline{B}) = 0{,}7\times0{,}6 = 0{,}42$; $p(S = 30) = p((T \cap B) = 0{,}28$.
b) L'espérance mathématique de S est égale à
$E(S) = 0\times p(S = 0) + 10\times p(S = 10) + 20\times p(S = 20) + 30\times p(S = 30) = 17{,}10$ €.
Interprétation de ce résultat : Si l'on prend un grand nombre de ménages, en moyenne ces ménagent recevront un chèque de 17,10 €.

BONUS : Soit X la variable aléatoire égale à la somme d'argent reçue par un ménage sur deux années.
On note S_1 la somme reçue la première année et S_2 la somme reçue la deuxième année; on suppose que S_1 et S_2 sont indépendantes. Alors $p(X = 0) = p(S_1 = 0 \cap S_2 = 0) = p(S_1 = 0)\times p(S_2 = 0) = 0{,}27^2 = 0{,}0729$;
$p(X = 10) = p(S_1 = 0 \cap S_2 = 10) + p(S_1 = 10 \cap S_2 = 0) = 2\times0{,}27\times0{,}03 = 0{,}0162$;
$p(X = 20) = p(S_1 = 0 \cap S_2 = 20) + p(S_1 = 20 \cap S_2 = 0) + p(S_1 = 10 \cap S_2 = 10) = 2\times0{,}27\times0{,}42 + 0{,}03^2 = 0{,}2277$;
$p(X = 30) = p(S_1 = 10 \cap S_2 = 20) + p(S_1 = 20 \cap S_2 = 10) + p(S_1 = 0 \cap S_2 = 30) + p(S_1 = 30 \cap S_2 = 0) = 0{,}1764$;
$p(X = 40) = p(S_1 = 10 \cap S_2 = 30) + p(S_1 = 30 \cap S_2 = 10) + p(S_1 = 20 \cap S_2 = 20) = 2\times0{,}27\times0{,}03 = 0{,}1932$;
$p(X = 50) = p(S_1 = 20 \cap S_2 = 30) + p(S_1 = 30 \cap S_2 = 20) = 2\times0{,}28\times0{,}42 = 0{,}2352$;
$p(X = 60) = p(S_1 = 30 \cap S_2 = 30) = 0{,}28^2 = 0{,}0784$. La somme est bien égale à 1.
L'espérance mathématique de X est $E(X) = 0\times0{,}0729 + 10\times0{,}0162 + 20\times0{,}2277 + 30\times0{,}1764 + 40\times0{,}1932 + 50\times0{,}2352 + 60\times0{,}0784 = 34{,}20$ € .

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

A - Étude d'une fonction auxiliaire :
On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. g est la somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc est dérivable sur cet intervalle et

$g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$. Comme $x > 0$ le signe de la dérivée est donc celui du trinôme

$2x^2 - 1 = (x\sqrt{2} + 1)(x\sqrt{2} - 1)$ ou encore de celui de $x\sqrt{2} - 1$ puisque $x\sqrt{2} + 1 > 1 > 0$.

Ce trinôme s'annule donc en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, $g'(x) < 0$ et la fonction est décroissante ;

sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;+\infty\right[$, $g'(x) > 0$ et la fonction est croissante.

2. On a $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 + \ln\sqrt{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2 > 0$.

Le minimum de g étant strictement supérieur à zéro, on a donc $g(x) > 0$, sur $]0\,;+\infty[$.

B - Étude de la fonction f :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe C.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Soit la fonction d définie sur $]0\,;+\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = \dfrac{\ln x}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$, c'est-à-dire que la droite D est asymptote à la courbe C au voisinage de plus l'infini.

3. La fonction f est la somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc est dérivable sur cet intervalle et

$f'(x) = 1 + \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2} > 0$ puisque g l'est. La fonction f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	
$f(x)$	$\|\| -\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

5. La droite D a pour coefficient directeur 1. Il faut donc chercher l'abscisse x_A telle que $f'(x_A) = 1$.

Donc on cherche $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} = 1$, soit $g(x) = x^2$ équivaut à

$1 - \ln x = 0$ équivaut à $\ln x = 1$ équivaut à $x = e$;

on calcule l'ordonnée du point A : $y_A = f(x_A) = f(e) = e + \dfrac{\ln e}{e} = e + \dfrac{1}{e}$. Ainsi $A\left(e\,;e + \dfrac{1}{e}\right)$.

C - Calcul d'une aire :

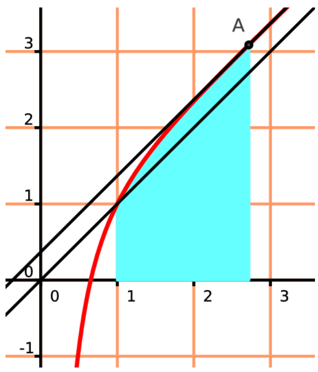
1. On reconnaît que $\dfrac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln x$, dont une primitive est $\dfrac{1}{2}u^2$;

donc $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln x\right]_1^e = \frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}$.

2. L'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe C est

$\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(x + \frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_1^e x\,dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} \approx 3{,}69$ (u.a.).

3. Le tracé de l'asymptote oblique à C, le point A et sa tangente et la région du plan de la question précédente.



EXERCICE 3 (QCM) :

1. Réponse B.
2. Réponse A.
3. Réponse B.
4. Réponse C.
5. Réponse A.