DEVOIR MAISON N° 11 TERMINALE S 5

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son sens de variations sur $]0\,;+\infty[$.
3. Tracer la représentation graphique de f dans le plan.
4. On pose, pour $p\geq 1$, $I_p=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}dx$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de I_1.
5. Montrer que, pour $p\geq 1$, $I_{p+1}=-\dfrac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p$. En déduire les valeurs exactes de I_2, I_3, I_4.

EXERCICE 2

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur I = $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$. On considère un réel a de I et on pose, pour tout entier naturel n, $I_n(a)=\displaystyle\int_0^a f_n(x)dx$.

1. Calculer $I_0(a)$.

2. a) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n entier naturel non nul : $f_n'(x)=f_{n-1}(x)-f_n(x)$ et $f_n(0)=0$.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$.

c) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a)=1-\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$.

3. Dans cette question, on pose $a=1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n\in\mathbf{N}$ par :

$u_n=1-\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1}=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, et pour tout x de $[0\,;1]$: $f_n(x)\leq\dfrac{1}{n!}x^n$.

b) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n : $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{(n+1)!}$ puis la limite de u_n.

c) Déduire enfin que $e=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}\right)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots$