

EXERCICE 1

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $f(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0.$$

2. $f'(x) = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} (2 - \ln x)$ s'annule en 1 et

en e^2 d'où le tableau de variations sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$		$4e^{-2}$	0

4. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, $v(x) = \frac{-1}{x}$; d'où $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[\frac{-\ln x}{x} \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{-1}{x^2} dx = \frac{-2}{e^2} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^{e^2} = 1 - \frac{3}{e^2}$.

5. On a, pour $p \geq 1$, $I_{p+1} = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^2} dx = \left[\frac{-(\ln x)^{p+1}}{x} \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \left(\frac{-1}{x} (p+1) \frac{1}{x} (\ln x)^p \right) dx = \frac{-2^{p+1}}{e^2} + (p+1) I_p$.

D'où $I_2 = \frac{-2^{1+1}}{e^2} + (1+1)I_1 = 2 - \frac{10}{e^2}$, $I_3 = \frac{-2^{2+1}}{e^2} + (2+1)I_2 = 6 - \frac{38}{e^2}$, $I_4 = \frac{-2^{3+1}}{e^2} + (3+1)I_3 = 24 - \frac{168}{e^2}$.

EXERCICE 2

1. $I_0(a) = \int_0^a e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$ (car $0! = 1$ et $f_0(x) = e^{-x}$).

2. a) Pour tout x de I et pour tout n entier naturel non nul, on a : $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} + \frac{x^n}{n!} (-e^{-x}) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et

$$f_n(0) = 0.$$

b) D'où, pour tout n entier naturel non nul :

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = \int_0^a (f_n(x) - f_{n-1}(x)) dx = \int_0^a (-f_n'(x)) dx = [-f_n(x)]_0^a = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}.$$

c) D'où, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a) = I_{n-1}(a) - \frac{a^n}{n!} e^{-a} = I_{n-2}(a) - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} - \frac{a^n}{n!} e^{-a} = \dots =$

$$I_0(a) - \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}.$$

3. a) Pour tout entier naturel n , et pour tout x de $[0; 1]$: $0 \leq x \leq 1$ entraîne $0 \leq e^x \leq e$ entraîne $0 \leq e^{-x} \leq e^{-1} < 1$ et en multipliant les termes par la quantité positive $\frac{1}{n!} x^n$, on obtient $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n$.

b) Donc, en utilisant la propriété : si, sur $[a, b]$ on a $f(x) < g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$; donc pour tout entier

naturel n : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx$; or $\int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$; on a, pour tout entier naturel n : $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n+1}$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ puis, par le théorème des gendarmes, la limite de u_n est 0.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right) e^{-1} \right) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right) e^{-1} = 1$ et donc

$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$ ce qui permet d'obtenir des approximations de e par des rationnels :

e ; $\frac{1957}{720}$ à 10^{-3} près; e ; $\frac{685}{252}$ à 10^{-4} près ...