CORRIGE DEVOIR MAISON N° 12 TERMINALE S 5

EXERCICE 1

1. Comme ABC est isocèle en A, H est le milieu de [BC] et barycentre de {(B, 1), (C, 1)}; alors G est barycentre du système de points pondérés {(A, 2) ; (H, 2)}, et donc G est le milieu de [AH].

2. a) On a $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{HA}$; or AH = 4 donc $\|\vec{V}\| = 8$.

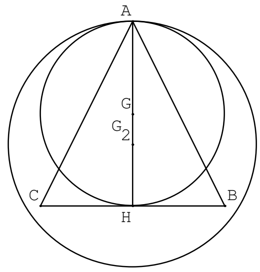
b) On a, pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$, donc l'ensemble E_1 est l'ensemble des points M du plan tel que $4MG=\|\vec{V}\| = 8$, soit MG = 2 ; donc l'ensemble E_1 est le cercle de centre G et de rayon 2.

3. a) Le point G_n existe si la somme des coefficients est non nulle : $2 + n + n = 2 + 2n > 0$ puisque n est un entier naturel. G_0 est le point A, G_1 est le point G de la question 1, G_2 est l'isobarycentre de ABC (centre de gravité).

b) Pour tout entier naturel n, on a H est le barycentre de {(B, n), (C, n)}; alors G_n est barycentre du système de points pondérés {(A, 2) ; (H, $2n$)}, donc le point G_n appartient au segment [AH].

c) On a $\overrightarrow{AG_n} = \frac{n}{2+2n}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{2+2n}\overrightarrow{AC} = \frac{n}{2+2n}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ et la distance $AG_n = \frac{n}{2+2n}(2AH) = \frac{4n}{1+n}$ et la limite de AG_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 4 (G_n tend vers H).

d) Pour tout entier naturel n, et pour tout point M du plan, on a $2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC} = (2+2n)\overrightarrow{MG_n}$ donc l'ensemble E_n est l'ensemble des points M du plan tel que $(2+2n)MG_n = n\|\vec{V}\| = 8n$, soit $MG_n = \frac{4n}{1+n}$; donc l'ensemble E_n est le cercle de centre G_n et de rayon $r_n = \frac{4n}{1+n}$. Comme $AG_n = \frac{4n}{1+n}$, E_n passe par le point A.



EXERCICE 2

1. a) On a $\overrightarrow{BC}$ (4 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{BA}$ (0 ; 6 ; -8). On calcule le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$:
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 4\times0+0\times6+0\times(-8) = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux et les droites (BC) et (BA) sont orthogonales.

b) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 4\times0+0\times6+8\times0 = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux et les droites (OC) et (OA) sont orthogonales.

c) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OA} = 4\times0+0\times6+0\times0 = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux et les droites (BC) et (OA) sont orthogonales. La droite (BC) est orthogonale aux droites (BA) et (OA) du plan (OAB) donc elle est orthogonale au plan (OAB).

d) On considère la base OAB, la hauteur du tétraèdre est alors BC. Le tétraèdre est une pyramide ; son volume est donné par 1/3(aire de la base)(hauteur). Donc volume(OABC) = $\frac{1}{3}\times\frac{OA\times OB}{2}\times BC = \frac{6\times8\times4}{3\times2} = 32cm^3$

e) Les plans médiateurs de [OA], [OB] et [BC] sont sécants en un point S équidistant des quatre points O, A, B, C. Donc les quatre points O, A, B et C se trouve sur une sphère de centre S et de rayon OS. Déterminons les coordonnées de S : le plan médiateur de [OA] a pour vecteur normal $\overrightarrow{OA}$ (0 ; 6 ; 0) et passe par le milieu I de [OA] , I(0 ; 3 ; 0); une équation de ce plan est $6y + d = 0$; il passe par I, donc $d = -18$; une équation est donc $y - 3 = 0$.
Le plan médiateur de [OB] a pour vecteur normal $\overrightarrow{OB}$ (0 ; 0 ; 8) et passe par le milieu J(0 ; 0 ; 4) de [OB]; une équation de ce plan est $z - 4 = 0$. Le plan médiateur de [BC] a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ (4 ; 0 ; 0) et passe par le milieu K(2 ; 0 ; 8) de [BC]; une équation de ce plan est $x - 2 = 0$. Le point S a pour coordonnées S(2 ; 3 ; 4) et le rayon de la sphère est OS = $\sqrt{29}$.

2. a) Le plan (Π) coupe les plans (OAB) et (OAC) en deux droites parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans, (OA) ; donc (MQ)//(OA)//(NP). De même, (Π) coupe les plans (OBC) et (ABC) en deux droites parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans, (BC) ; donc (MN)//(BC)//(QP). De plus, (BC) ⊥ (OA), donc (MN) ⊥ (MQ), donc le quadrilatère MNPQ est un rectangle.

b) Le plan (Π) étant orthogonal à la droite (OB), toute droite de ce plan est orthogonale à (OB) ; donc (PM) ⊥ (OB) .

c) Le plan (Π) a pour équation $z = k$. La droite (OC) a pour représentation paramétrique : { $x = 4t$; $y = 0$; $z = 8t$, $t \in \mathbb{R}$; on obtient N(k/2 ; 0 ; k) ; Q(0 ; (24 - $3k$)/4 ; k) et P(k/2 ; (24 - $3k$)/4 ; k). La droite (PM) est orthogonale à la droite (AC) si $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AC} = 0$; on a $\overrightarrow{PM}$ (-k/2 ; -(24 - $3k$)/4 ; 0) et $\overrightarrow{AC}$ (4 ; -6 ; 8). Donc, $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AC} = 0$ si $k = 72/13$.

d) MP² = ($13k^2$ - $144k$ + 576)/16 = $f(k)$. PM est minimale si PM² est minimale ; $f'(k) = 26k - 144$ s'annule pour $k = 72/13$. La fonction f est un polynôme du second degré ; donc PM est minimale si $k = 72/13$ (et si (PM) ⊥ (AC)).