DEVOIR MAISON N° 3 TERMINALE S 5

EXERCICE 1 : Cet exercice a pour but d'étudier quelques fonctions numériques qui possèdent les propriétés :
(1) La fonction est continue sur [0 ; 1] et dérivable sur]0 ; 1[;
(2) Pour tout x de [0 ; 1], on a $fof(x) = x$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Etude de deux exemples :

1) La fonction f_1 est définie sur [0 ; 1] par $f_1(x) = \dfrac{1-x}{1+2x}$. Démontrer que f_1 vérifient (1) et (2). Tracer la courbe représentative C_1 de f_1 .

2) La fonction f_2 est définie sur [0 ; 1] par $f_2(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Démontrer que f_2 vérifient (1). Etudier les variations de f_2 . Construire la courbe C_2 de f_2 en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
Démontrer que f_2 vérifie (2).

Partie B : Cas plus général :

1) Soit f une fonction numérique qui vérifie les propriétés (1) et (2).
a) Démontrer que f est une fonction continue et strictement monotone de [0 ; 1] dans [0 ; 1] .
b) Démontrer que la courbe représentative C de f admet un axe de symétrie.
c) Démontrer que si f est croissante, alors pour tout x de [0 ; 1], $f(x) = x$.
d) Si f est décroissante, déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
2) Déterminer toutes les fonctions polynômes vérifiant les conditions (1) et (2).
3) Déterminer toutes les fonctions homographiques de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, qui vérifient les conditions (1) et (2).

EXERCICE 2 : On considère deux réels a et b tels que $0 < a < b$, et les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$;

(rappel : u_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n ; v_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n) .
Le but du problème est de montrer que les deux suites sont adjacentes, de trouver leur limite commune et d'en déduire des approximations de réels par des rationnels.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont strictement positifs.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

c) Montrer que, pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, on a $\dfrac{y-x}{2(x+y)} < \dfrac{1}{2}$. En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n > 0$, on a $v_n - u_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

f) En déduire la limite de $v_n - u_n$.

g) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

h) Montrer que, pour tout entier naturel n, le produit $u_n v_n$ est constant. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

i) Donner alors un encadrement de $\sqrt{6}$ par deux rationnels au cent millième près.