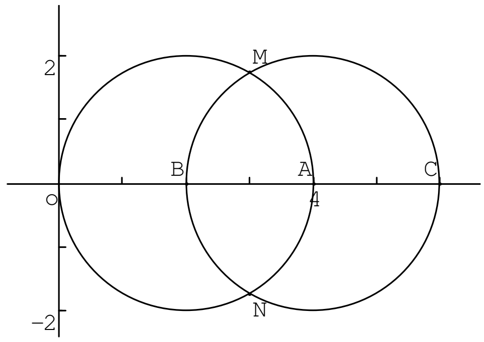
CORRECTION DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE S 5

EXERCICE 1 : 1. a) Le discriminant Δ = -12 donc il y a deux solutions complexes : $u=\dfrac{6+2i\sqrt{3}}{2}=3+i\sqrt{3}$ et $\bar{u}=3-i\sqrt{3}$. b) On a $|u|=|\bar{u}|=2\sqrt{3}$; notons $\theta = arg(u)$;

on a $cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(\theta)=\dfrac{1}{2}$, d'où $Arg(u)=\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $Arg(\bar{u})=-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

2. a) $u-4=-1+i\sqrt{3}=2(cos(\dfrac{2\pi}{3})+i\,sin(\dfrac{2\pi}{3}))$.



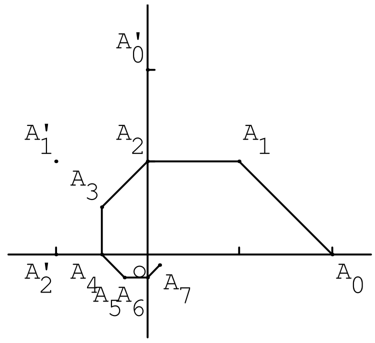
b) $\left|\dfrac{u}{u-4}\right|=\dfrac{|u|}{|u-4|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ et

$Arg(\dfrac{u}{u-4})=Arg(u)-Arg(u-4)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi]$.

Les points O, A, M, N sont sur le cercle de centre B et de rayon 2 :
OB = BA = 2 ; BM = BN = $|u-2|$ = 2 .

Les points B, C, M, N sont sur le cercle de centre A et de rayon 2 :
AB = AC = 2 ; AM = AN = $|u-4|$ = 2 .

EXERCICE 2 : 1. a) L'affixe de A_1 : $z_1=1+i$; l'affixe de A'_1 : $z'_1=iz_1=-1+i$; l'affixe de A_2 : $z_2=\dfrac{z_1+z'_1}{2}=i$; l'affixe de A'_2 : $z'_2=iz_2=-1$; l'affixe de A_3 : $z_3=\dfrac{z_2+z'_2}{2}=\dfrac{-1+i}{2}$. b) $r_0=|z_0|=2$, $r_1=|z_1|=\sqrt{2}$, $r_2=|z_2|=1$, $r_3=|z_3|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta_0=0\ [2\pi]$, $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$, $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\theta_3=\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$



2. a) $z_{n+1}=\dfrac{z_n+z'_n}{2}=\dfrac{z_n+iz_n}{2}=z_n\dfrac{(1+i)}{2}$; la suite des nombres complexes (z_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1+i}{2}$ et de premier terme $z_0=2$; donc $z_n=2\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$.

b) On a $r_{n+1}=|z_{n+1}|=|z_n|\left|\dfrac{1+i}{2}\right|=r_n\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; donc la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $r_0=2$; donc $r_n=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. On a $\theta_{n+1}=Arg(z_{n+1})=Arg(z_n)+Arg\left(\dfrac{1+i}{2}\right)=\theta_n+\dfrac{\pi}{4}$; donc la suite (θ_n) est arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{4}$ et de premier terme $\theta_0=0$; donc $\theta_n=n\dfrac{\pi}{4}$.

c) Comme $0<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0$; ce qui signifie que la distance OA_n tend vers 0.

d) $z_{n+8}=r_{n+8}e^{i\theta_{n+8}}=r_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 e^{i(\theta_n+8\frac{\pi}{4})}=z_n\times\dfrac{1}{16}e^{i2\pi}=\dfrac{1}{16}z_n$, donc $r_{n+8}=\dfrac{1}{16}r_n$ et $\theta_{n+8}=\theta_n$.

e) $A_nA_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=\left|(z_n-z_{n-1})\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\right|=|z_n-z_{n-1}|\left|\dfrac{1+i}{2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$. Soit $u_n=A_nA_{n+1}$; on a alors, pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u_{n-1}$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $u_0=A_0A_1=\sqrt{2}$; Ainsi $A_nA_{n+1}=u_n=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. La longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_n$ est la somme des longueurs A_nA_{n+1} ; donc

$$l_n=u_0+u_1+u_2+...+u_{n-1}=u_0\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}\times\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).\ \text{Et}\ \lim_{n\to+\infty}l_n=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2(1+\sqrt{2}).$$