CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 3

EXERCICE 1 : a) On a $\omega = cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\omega^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = cos(\frac{4\pi}{3}) + i\,sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) On a $1 + \omega + \omega^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ et $\overline{\omega} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2$.

c) On a $|\omega| = 1$ et $|1 + \omega| = \left|1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$; comme $|\overline{\omega}| = |\omega|$ et $|\overline{1+\omega}| = |1+\overline{\omega}| = |1+\omega|$ alors le conjugué vérifie aussi la relation.

d) On pose $z = a + ib$; si $|z| = |1 + z|$, on obtient (en passant au carré) $a^2 + b^2 = (1 + a)^2 + b^2$ et on trouve $a = -\frac{1}{2}$; donc la partie réelle de z vérifie $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

Question subsidiaire : Si $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(1 + z)$, alors $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(1 + z) = 0$ soit $\mathrm{Arg}(\frac{z}{1+z}) = 0$; or $\frac{z}{1+z} = \frac{a(1+a) + b^2 + ib}{(a+1)^2 + b^2}$ son argument est nul si sa partie imaginaire est nulle : donc $b = 0$ et donc $z = a$ et z est réel.

EXERCICE 2 : a) $\Delta = -8 < 0$, il y a donc deux solutions complexes : $z_1 = \frac{2\sqrt{2} + i\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; les modules sont égaux à 2 ; des arguments sont opposés et $\mathrm{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. D'où $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) On remarque que $z_2 = z_B = \sqrt{2}(1-i)$, $z_1 = z_C = \sqrt{2}(1+i)$.

c) On a $e^{i\frac{3\pi}{4}} z_B = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i = z_A$.

d) On a $z_D = e^{i\frac{3\pi}{4}} z_A = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

e) On a $iz_D = i(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = z_B$.   f) On a OA = OB = OC = OD car $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$, donc les points A, B, C, D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

EXERCICE 3 : a) On a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $g'(x) = x^2 - x + 1$; $h'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$ définies sur] -1 ; +∞[. La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$; on obtient ici l'équation de la tangente en 0 : $y = f'(0)(x) + f(0) = x$; on vérifie que l'équation de la tangente en 0 à C_g et à C_h est $y = x$. Donc les trois courbes ont bien la même tangente en 0.

b) On a $d(x) = f(x) - g(x) = ln(1+x) - (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x)$; la dérivée est $d'(x) = \frac{1}{1+x} - (x^2 - x + 1) = \frac{-x^3}{1+x}$; d'où le tableau de variations :

x	-1		0		1
$d'(x)$	||	+	0	−	
$d(x)$	−∞	↗	0	↘	ln2-5/6

Et on en déduit le signe de $d(x)$: son maximum est 0, donc $d(x)$ est négatif sur] -1 ; 1 [.

On a $j(x) = f(x) - h(x) = ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$; la dérivée est $j'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}$; d'où le tableau de variations :

x	-1		0		1
$j'(x)$	||	+	0	+	
$j(x)$	−∞	↗	0	↗	ln2-2/3

Et on en déduit le signe de $j(x)$: sur] -1 ; 0 [, $j(x)$ est négatif et sur] 0 ; 1 [, $j(x)$ est positif.
Il faut encore étudier le signe de $g(x) - h(x)$ sur] 0 ; 1 [...

c) On obtient : sur] -1 ; 0 [, C_f au-dessous de C_g qui est au-dessous de C_h ; sur] 0 ; 1 [, C_h au-dessous de C_f qui est au-dessous de C_g .

d) On a $ln(1{,}01) = f(0{,}01)$; d'après la question b), $h(0{,}01) < f(0{,}01) < g(0{,}01)$, d'où $\frac{2}{201} < ln(1{,}01) < \frac{59702}{6000000}$.

e) On a $foh(x) = ln(1 + \frac{2x}{x+2}) = ln(\frac{3x+2}{x+2}) = -\frac{1}{2}$ équivalent à $\frac{3x+2}{x+2} = e^{-\frac{1}{2}}$ et on trouve $x = \frac{2e^{-\frac{1}{2}} - 2}{3 - e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2 - 2\sqrt{e}}{3\sqrt{e} - 1}$.