CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 6 TERMINALE S 5

EXERCICE 1 : Partie A : Il s'agit d'un schéma de Bernouilli avec 2n lancers et une probabilité de succès pour chaque lancer de ½ . La probabilité d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce est $=\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{8-4}=\frac{70}{2^8}=\frac{35}{128}$ et la probabilité d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce est $=\binom{12}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{12-6}=\frac{924}{2^{12}}=\frac{231}{1024}<\frac{280}{1024}=\frac{35}{128}$; donc on a plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce .

On a P(n) = $\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n}=\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$; de plus P(n + 1) = $\binom{2(n+1)}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)-(n+1)}=\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}}$.

D'où, pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}}}{\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}}\times\frac{1}{4}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}=\frac{2n+1}{2(n+1)}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est une loi binomiale de paramètres 2n et ½ ; d'où $p(X=k)=\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$. L'espérance mathématique de X est égale au produit des paramètres = n.

Partie B : P(A) = P(« obtenir deux boules rouges » ou « obtenir deux boules jaunes ») = P(« obtenir deux boules rouges ») + P(« obtenir deux boules jaunes ») = $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$. P(B) = 1 - P(A) = $\frac{7}{15}$.

La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1 et 2. On a P(X = 0) = P(« obtenir deux boules jaunes ») = $\frac{1}{15}$;

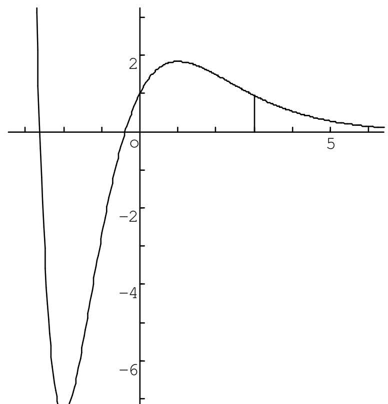
P(X = 2) = P(« obtenir deux boules rouges ») = $\frac{7}{15}$; et P(X = 1) = P(« obtenir une boule jaune et une boule rouge ») = $\frac{7}{15}$. Son espérance mathématique est E(X) = $0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{7}{15}=\frac{7}{5}$.

EXERCICE 2 : Partie A : a) On a $f'(x)=(2x+a)e^{x^2+ax+b}$ et $f'(1,5)=0$ d'où a = -3. De plus, $f(1,5)=e^{1,5^2+1,5a+b}=e^{-1,25}$, d'où $1,5^2+1,5a+b=-1,25$ et b = 1.

b) La droite d'équation $x=1,5$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f si pour tout x de IR , on a $f(1,5+x)=f(1,5-x)$. On a $x^2-3x+1=(x-1,5)^2-1,25$, d'où $f(1,5+x)=e^{x^2-1,25}=f(1,5-x)$.

Partie B : a) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\alpha}e^{-x})=0$ pour α réel positif. b) $g'(x)=(-x^2-x+2)e^{-x}$; le signe de cette dérivée est celui de $(-x^2-x+2)$. D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-e^2$	↗	$5/e$	↘	0



d) Comme la fonction g est strictement positive sur IR+, u_n est l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_g et les droites d'équation x = 0 et x = n. u_3 est grisée sur le dessin.

e) $u_0=\int_0^0 g(x)dx=0$. On a $u_{n+1}=u_n+\int_n^{n+1}g(x)dx>u_n$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

f) G'(x) = $(x^2+3x+1)e^{-x}$ donc G est une primitive de g . D'où $u_n=G(n)-G(0)=(-n^2-5n-6)e^{-n}+6$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$. L'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_g et l'axe des ordonnées vaut 6 unités d'aires.

Partie C : a) $h'(x)=2e^{2x}+ce^x$ d'où $h'(ln(1,5))=2e^{2ln(1,5)}+ce^{ln(1,5)}=2\times(1,5)^2+1,5c=0$ d'où c = -3 ; $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=d=2$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$

b) Pour résoudre l'équation $h(x)$ = 0, on pose $X=e^x$; l'équation devient $X^2-3X+2=0$ qui a deux solutions : $X_1=1$ et $X_2=2$; d'où les solutions $x_1=0$ et $x_2=ln2$.