EXERCICE 1 (9 points)

PARTIE A : On considère l'équation différentielle (E1) définie par $y' - 2y = 3e^x - 4x + 2$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E2) définie par $y' - 2y = 0$.

b) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -3e^x + 2x$ est solution de (E1).

c) Montrer qu'une fonction v est solution de (E2) si et seulement si $u + v$ est solution de (E1).

d) En déduire toutes les solutions de (E1).

e) Déterminer la solution f de (E1) telle que la courbe représentative de f admette une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

PARTIE B : On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C_g. Préciser la position relative de (d) et C_g.

c) Etudier les variations de la fonction f. Dresser son tableau de variations.

d) Calculer l'aire comprise entre C_g, (d) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 2$.

EXERCICE 2 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et pour $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

a) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer $f'(x)$ et en déduire u_0.

b) Calculer u_1.

c) Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout x de [0 ; 1], comparer x^n et x^{n+1}. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

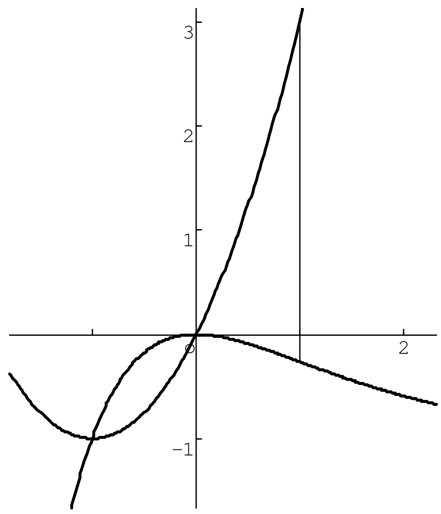
d) Démontrer que, pour tout x de [0 ; 1], $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

e) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

f) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 (4 points)

Déterminer l'aire comprise sur la figure ci-contre entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ et les deux courbes sachant que les deux courbes sont les représentations graphiques des fonctions f et g définie par $f(x) = (x+1)e^{-x} - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x$.



DEVOIR MAISON N° 11 **TERMINALE S 5**