

EXERCICE 1 (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Montrer que, pour tout x réel, on a $\sqrt{x^2 + 1} > x$ et $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

- a) Montrer que la fonction f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe C représentative de f ?
- b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- c) Calculer la dérivée de f et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f .
- d) Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0.

3. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$, on associe son

image M' par r , d'affixe $z' = x' + iy'$.

a) Montrer que $x' = -y$ et $y' = x$.

b) Montrer que, si le point M est sur la courbe C , alors son image M' est sur la courbe C' représentative de la fonction g

définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Calculer la dérivée de g et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de g .

c) Déterminer une équation de la tangente à C' au point d'abscisse 0.

d) Calculer $\int_0^{+\infty} g(x) dx$. En déduire l'aire comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites

d'équation $x = -\frac{4}{3}$ et $x = 0$.

EXERCICE 2 (8 points)

Soit le repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace. On considère les points $A(2 ; -1 ; 0)$, $B(0 ; 3 ; -4)$, $D(4 ; 1 ; 1)$ et $S(-2 ; 1 ; 4)$.

a) Montrer que les points A, B et D ne sont pas alignés.

b) Déterminer les coordonnées du point C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

d) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AS}$. En déduire une équation du plan (ABD) .

e) La droite (d) passe par D et est parallèle à (AS) . Déterminer une représentation paramétrique de (d) .

f) Montrer que le vecteur $u(1; -1; 0)$ est un vecteur normal au plan (SBC) . La droite (d) coupe le plan (SBC) en E . Déterminer les coordonnées du point E .