CORRIGE DEVOIR SURVEILLE N° 8 TERMINALES S 5

EXERCICE 1 :

1. Pour tout x réel , on a $x^2+1>x^2$; la fonction racine carrée étant strictement croissante sur [0 ; +∞[, on a $\sqrt{x^2+1}>|x|\geq x$, d'où $\sqrt{x^2+1}>x$. De plus $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

2. a) D'après la question 1., on a $\sqrt{x^2+1}-x>0$; donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0), $f(-x)=ln(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x))=ln(\sqrt{x^2+1}+x)=ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)=-ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$. Donc la fonction f est impaire. On en déduit que la courbe C admet le point O comme centre de symétrie.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(ln(\sqrt{x^2+1}-x))=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(ln(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}))=-\infty$.

c) On pose $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$; alors $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}}<0$. Donc la fonction f est strictement décroisante sur $\mathbb{R}$. d) Equation de la tangente à C en $x = 0$: $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x$.

3. a) On a $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z=iz$, donc $x'+iy'=i(x+iy)=-y+ix$ donc $x'=-y$ et $y'=x$.

b) Soit M(x ; y) sur la courbe C, alors $y=ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ et son image M'(x' ; y') vérifie $x'=ln(\sqrt{y'^2+1}+y')$ d'où en prenant l'exponentielle : $e^{x'}=\sqrt{y'^2+1}+y'$ soit $e^{x'}-y'=\sqrt{y'^2+1}$; en élevant au carré : $(e^{x'}-y')^2=y'^2+1$, soit $e^{2x'}-2e^{x'}y'=1$ et donc $y'=\dfrac{e^{x'}-e^{-x'}}{2}$, donc $g(x')=y'$ et le point M' est sur la courbe C'.

4. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

b) $g'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$. Donc la fonction g est strictement croisante sur $\mathbb{R}$.

c) Equation de la tangente à C' au point d'abscisse 0 : $y=g'(0)(x-0)+g(0)=x$

d) $\displaystyle\int_0^{ln3} g(x)dx=\int_0^{ln3}\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_0^{ln3}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}-\frac{1+1}{2}=\frac{2}{3}$. Lorsque le point M' est dans la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équation $x'=0$ et $x'=\ln 3$, alors le point M", image de M par la rotation susnommée est compris dans la partie du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-\dfrac{4}{3}$ et $x = 0$; donc cette aire est égale à $\dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 2 : a) Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-2\ ;4\ ;-4)$ et $\overrightarrow{AD}(2\ ;2\ ;1)$ ne sont pas colinéaires : leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles car $-2\times(-1)=2$ et $4\times(½)=2$. Donc les points A,B et D ne sont pas alignés.

b) ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, soit $x_C-x_D=x_B-x_A$ d'où $x_C=2$ et on obtient C(2 ; 5 ; −3).

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-2\times2+4\times2-4\times1=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux. Donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.

d) $\overrightarrow{AS}(-4;2;4)$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS}=-2\times(-4)+4\times2-4\times4=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont orthogonaux. On a aussi $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AS}=2\times(-4)+2\times2+1\times4=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont orthogonaux. Ainsi la droite (AS) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD) donc elle est orthogonale à ce plan. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est un vecteur normal au plan (ABD). Une équation du plan (ABD) est $-4x+2y+4z+d=0$. Ce plan contient le point A : $-4\times2+2(-1)+4\times0+d=0$ et $d=10$; d'où une équation de (ABD) : $-2x+y+2z+5=0$.

e) La droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}$ et passe par D, d'où une représentation paramétrique de (d) : { $x = 4 - 4t$; $y = 1 + 2t$; $z = 1 + 4t$ avec $t\in\mathbb{R}$.

f) On a $\vec{u}.\overrightarrow{SB}=\vec{u}.\overrightarrow{SC}=0$. Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$, donc il est normal à (SBC) ; une équation de (SBC) est $x - y + 3 = 0$; les coordonnées de E vérifient le système : { $x = 4 - 4t$; $y = 1 + 2t$; $z = 1 + 4t$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $x - y + 3 = 0$. On trouve $t = 1$ et E(0 ; 3 ; 5).

.