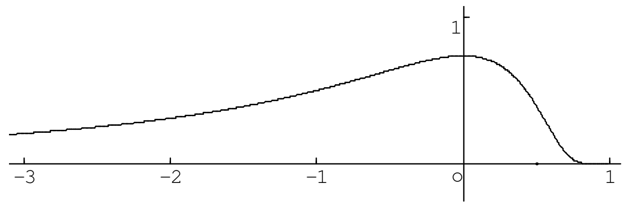
EXERCICE 1 : 1. a) On a $\frac{x+1}{x-1} = 1+\frac{2}{x-1} = 1+X$, d'où $\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{(x-1)^2}e^{1+X} = \frac{e}{2}X^2e^X$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} X = -\infty$ et en utilisant les croissances comparées : $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2e^X = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{(x-1)^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. c) La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote horizontale à C.

d) La fonction f est dérivable sur] –∞ ; 1 [comme produit de deux fonctions qui le sont. $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$; le signe de cette dérivée dépend de $-4x$, donc la fonction f est croissante sur] –∞ ; 0 [puis décroissante sur] 0 ; 1[. Elle atteint un maximum égal à 2/*e* en $x = 0$. e) Représentation de C :



2. a) En dérivant la fonction f, on a vu que $\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)' = \frac{-2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$, donc une primitive de f sur] –∞ ; 1 [est F(x) = $-\,e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

b) On a $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx = \left[-e^{\frac{x+1}{x-1}}\right]_0^\alpha = \frac{1}{e} - e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$. g(1/2) représente l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

c) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-1} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = e^{-1}$.

3. a) On a 2/e ≈ 0,73 ; donc ½ ∈]0 ; 2/e [. Sur] –∞ ; 0 [, la fonction f est continue et strictement croissante et ses valeurs sont dans]0 ; 2/e [; donc l'équation $f(x)$ = ½ a une unique solution dans] –∞ ; 0 [; or f(-1) = ½ , donc –1 est cette solution. Sur] 0 ; 1 [, la fonction f est continue et strictement décroissante et ses valeurs sont dans]0 ; 2/e [; donc l'équation $f(x)$ = ½ a une unique solution β dans] 0 ; 1 [; b) Par approximation, on obtient 0,43 < β < 0,44 .

EXERCICE 2 : Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{2x+a}{3} - x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}$.

1. La fonction f est dérivable sur]0 ; +∞ [comme somme de fonctions qui le sont. Sa dérivée est

$f'(x) = \frac{2}{3} - a^{\frac{1}{3}}\times\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. $f'(x) > 0$ pour $1-\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} > 0$ soit $1 > \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, soit $\frac{a}{x} < 1$, soit $a < x$. Donc la fonction f est décroissante sur [0 ; a] et croissante sur [a ; +∞ [. Elle atteint donc un minimum pour $x = a$ et ce minimum est $f(a) = 0$; donc la fonction f est positive sur]0 ; +∞ [. L'équation $f(x) = 0$ a pour solution $x = a$, puisque le minimum de la fonction est 0 atteint pour $x = a$.

2. Comme b et c sont deux nombres réels strictement positifs, alors (b + c)/2 est aussi strictement positif.

a) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$, donc $\frac{2x+a}{3} \geq x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}$ et en prenant $x = (b+c)/2$, on obtient $\frac{a+b+c}{3} \geq \left(\frac{b+c}{2}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}$; l'égalité n'a lieu que pour $x = a = \frac{b+c}{2}$.

b) $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - bc = \frac{b^2+2bc+c^2}{4} - bc = \frac{b^2-2bc+c^2}{4} = \frac{(b-c)^2}{4}$ qui est toujours positif, donc $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \geq bc$; l'égalité n'a lieu que si $\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = 0$ soit si $b = c$.

3. Ainsi, pour tous réels a, b, c strictement positifs, on a $\frac{a+b+c}{3} \geq \left(\frac{b+c}{2}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}} \geq \left(\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} \geq (bc)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}$, soit

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Et l'égalité n'a lieu que lorsque $a = b = c$.

En fait, le nombre $\frac{a+b+c}{3}$ est la moyenne arithmétique des trois nombres *a, b, c* et le nombre $\sqrt[3]{abc}$ est la moyenne géométrique de ces trois nombres.