CORRECTION DEVOIR MAISON N° 1 TERMINALE S 3

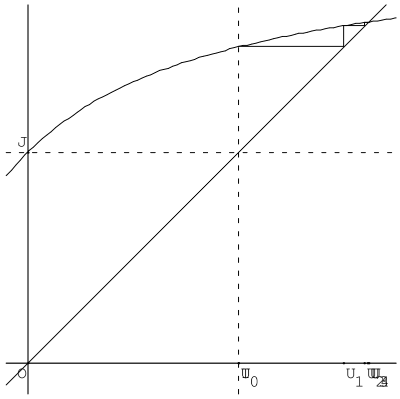
A. 1) On a $\phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\phi$; ainsi $\phi = \dfrac{1+\phi}{\phi} = 1+\dfrac{1}{\phi}$; et, en remplaçant ϕ par $1+\dfrac{1}{\phi}$ au dénominateur, il vient : $\phi = 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\phi}}$.

2) On a $\phi^3 = \phi^2\times\phi = (1+\phi)\phi = \phi+\phi^2 = \phi+1+\phi = 1+2\phi$ et $\phi^4 = \phi^3\times\phi = (1+2\phi)\phi = \phi+2\phi^2 = \phi+2+2\phi = 2+3\phi$.
Pour tout entier naturel *n*, on peut exprimer ϕ^n en fonction de ϕ : c'est vrai pour *n* =2 ; supposons-le vrai pour *n* , soit $\phi^n = a+b\phi$; alors pour *n* + 1, on a $\phi^{n+1} = \phi^n\times\phi = (a+b\phi)\phi = a\phi+b\phi^2 = a\phi+b+b\phi = b+(a+b)\phi$, donc vrai .

B.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$; la courbe C représentative de f admet donc deux asymptotes : l'une verticale d'équation x = -1 et l'autre horizontale d'équation y = 2. La fonction *f* est dérivable de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ >0 donc la fonction *f* est strictement croissante sur] -1 ; +∞[.

2) Représentation graphique de la suite :



3) La suite (u_n) semble monotone croissante ; elle semble convergente. Sa limite semble être l'abscisse du point d'intersection de (d) et C, solution de l'équation $x = f(x)$; on trouve

4) On considère la propriété (P*n*) : $u_n \geq 1$. On a $u_0 = 1$ donc (P0) est vraie ; supposons (P*n*) vraie et montrons que (P*n*+1) est vraie :
$u_{n+1} = f(u_n) = 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{u_n}}$; or $u_n \geq 1$ donc $1+\dfrac{1}{u_n} > 1 > 0$, donc $u_{n+1} \geq 1$. Ainsi, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 1$.

5) Pour tout *x* de [1 ; +∞[, on a
$$f(x)-\phi = \frac{1+2x}{1+x}-\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2(1+2x)-(1+\sqrt{5})(1+x)}{2(1+x)} = \frac{(3-\sqrt{5})x+1-\sqrt{5}}{2(1+x)} = \frac{(3-\sqrt{5})(x-\phi)}{2(1+x)}.$$

6) Pour tout *x* de [1 ; +∞[, on a $2(1+x) \geq 4$ et $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, donc $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2(1+x)} \leq 4$, donc $|f(x)-\phi| < \dfrac{1}{4}|x-\phi|$.

7) Pour tout entier naturel *n*, on a $u_n \geq 1$, donc $|f(u_n)-f(\phi)| < \dfrac{1}{4}|u_n-\phi|$; de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\phi) = \phi$ donc $|u_{n+1}-\phi| < \dfrac{1}{4}|u_n-\phi|$.

8) On considère la propriété (P*n*) : $|u_n-\phi| < \dfrac{1}{4^n}$. On a $|u_0-\phi| = \left|1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 < \dfrac{1}{4^0}$ donc (P0) est vraie ; supposons (P*n*) vraie et montrons que (P*n*+1) est vraie : $|u_{n+1}-\phi| < \dfrac{1}{4}|u_n-\phi| < \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^{n+1}}$, donc pour tout entier naturel *n*, $|u_n-\phi| < \dfrac{1}{4^n}$.

9) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4^n} = 0$ (comme limite d'une suite géométrique de raison ¼) ; donc la suite (u_n) converge vers ϕ .

C. 1) Les 6 premiers termes de la suite (w_n) : $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 5$, $w_5 = 8$.
Les 5 premiers termes de la suite (v_n) : $v_0 = \dfrac{w_1}{w_0} = 1$, $v_1 = \dfrac{w_2}{w_1} = 2$, $v_2 = \dfrac{3}{2}$, $v_3 = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}666$, $v_4 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$

Pour tout entier naturel *n*, on a $v_{n+1} = \dfrac{w_{n+2}}{w_{n+1}} = \dfrac{w_{n+1}+w_n}{w_{n+1}} = 1+\dfrac{1}{v_n} = g(v_n)$; en reprenant les questions de la partie B avec la fonction g , on montre que la suite (v_n) converge vers ϕ .