CORRECTION DEVOIR MAISON N° 2 TERMINALE S 3

A. 1. Les limites du polynôme f en $+\infty$ et en $-\infty$ sont donnés par la limite du terme de plus haut degré ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. La fonction f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. On a $f'(x)=3x^2+2ax+b$; c'est un polynôme du second degré ; pour déterminer son signe, on calcule son discriminant : $\Delta=(2a)^2-4\times3\times b=4a^2-12b=4(a^2-3b)$.

Si $\Delta > 0$, il y a 2 solutions x_1 et x_2 à l'équation $f'(x) = 0$; le signe de $f'(x)$ est positif pour les valeurs extérieurs aux racines et négatif pour les valeurs entre les racines.

Si $\Delta = 0$, il y a une solution à l'équation $f'(x) = 0$; et $f'(x)$ est positif.

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution à l'équation $f'(x) = 0$; le signe de $f'(x)$ est le signe du coefficient de x^2 donc positif.

4. Si $\Delta < 0$ ou si $\Delta = 0$, la dérivée est positive, donc f est strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Si $\Delta > 0$, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires : la fonction f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

5. Le point S $\left(-\frac{a}{3}\ ;\ f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe C si pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f\left(\frac{-a}{3}-x\right)+f\left(\frac{-a}{3}+x\right)=2f\left(\frac{-a}{3}\right)$; on a bien $f\left(\frac{-a}{3}-x\right)+f\left(\frac{-a}{3}+x\right)=\frac{4a^3-18ab+54c}{27}=2f\left(\frac{-a}{3}\right)$.

B. 1. Une équation de (D_α) est donnée par $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

2. On a $g'(x)=f'(x)-f'(\alpha)$ et $g''(x)=f''(x)$. Les variations de g' sont données par le signe de $g''(x)$ donc par le signe de $f''(x)=6x+2a$. Donc si $x<-\frac{a}{3}$, alors $f''(x)$ est négative et g' est décroissante ; si $x\geq-\frac{a}{3}$ alors $f''(x)$ est positive et g' est croissante. On a $g'\left(-\frac{a}{3}\right)=f'\left(-\frac{a}{3}\right)-f'(\alpha)=3\left(\frac{-a}{3}\right)^2+2a\left(\frac{-a}{3}\right)-3\alpha^2-2a\alpha=-\frac{1}{3}(a+3\alpha)^2\leq0$.

3. Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -\frac{a}{3}[$, la fonction g' est continue et strictement décroissante dans $]\ g'\left(-\frac{a}{3}\right);+\infty\ [$; ces deux bornes sont de signes contraires, donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty\ ;\ -\frac{a}{3}[$; de même, sur l'intervalle $[-\frac{a}{3}\ ;+\infty[$, la fonction g' est continue et strictement croissante dans $]\ g'\left(-\frac{a}{3}\right);+\infty\ [$; ces deux bornes sont de signes contraires, donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-\frac{a}{3}\ ;+\infty[$. On a $g'(\alpha)=f'(\alpha)-f'(\alpha)=0$ donc α est une des solutions ; l'autre β vérifie $g'(\beta)=f'(\beta)-f'(\alpha)=0$; soit $f'(\beta)=f'(\alpha)$; soit $3\beta^2+2a\beta=3\alpha^2+2a\alpha$; on résout cette équation d'inconnue β et on trouve $\Delta=4(a+3\alpha)^2$; il y a deux solutions : α et $\beta=\frac{-2a}{3}-\alpha$. On vérifie que $g(\beta)=4\left(\frac{a}{3}+\alpha\right)^3$.

4. Signe de $g'(x)$: positif pour les valeurs extérieurs aux racines α et β, et négatif entre ces racines.

5. Signe de $g(x)$:

$\alpha>-\frac{a}{3}$		$\alpha<-\frac{a}{3}$		$\alpha=-\frac{a}{3}$	
x	$-\infty$ β $-a/3$ α $+\infty$	x	$-\infty$ α $-a/3$ β $+\infty$	x	$-\infty$ $\alpha=\beta$ $+\infty$
$g'(x)$	+ 0 − 0 +	$g'(x)$	+ 0 − 0 +	$g'(x)$	+ 0 +
$g(x)$	↗ ↘ 0 ↗	$g(x)$	↗ 0 ↘ ↗	$g(x)$	↗

6. Localement, autour du point d'abscisse α, la position de la tangente (D_α) par rapport à C est donné par le signe de $g(x)$. D'après la question précédente, si $\alpha>-\frac{a}{3}$, alors (D_α) est au-dessous de C ; si $\alpha<-\frac{a}{3}$, alors (D_α) est au-dessus de C ; et si $\alpha=-\frac{a}{3}$, alors (D_α) coupe C.

7. Si $\alpha\neq-\frac{a}{3}$, l'équation $g(x) = 0$ a deux solutions, donc (D_α) coupe C en deux points. Sinon un seul point ...

8. Il suffit de prendre une fonction f de la forme $(x-2)^2(x-3)=x^3-7x^2+16x-12$; d'où $a = -7$, $b = 16$, $c = -12$.