

**EXERCICE 1 :** Le but de cet exercice est de calculer quelques limites de fonctions :

1. On veut calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 + x^2 - 3}{x^5 + x^4 - 2}$  ; a) montrer qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b) on pose  $u(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 3$  et  $v(x) = x^5 + x^4 - 2$  ; vérifier que pour tout  $x \neq 1$ , on a

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{u(x) - u(1)}{x - 1}}{\frac{v(x) - v(1)}{x - 1}}$$

c) Que représente  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{u(x) - u(1)}{x - 1}$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{v(x) - v(1)}{x - 1}$  ? Déterminer alors ces limites.

d) En déduire la limite cherchée.

e) Utiliser la même méthode pour déterminer la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^3 + x}$  .

2. On veut calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$  ; a) montrer qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b) Montrer que, pour tout  $x$  réel, on a  $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$  ; en déduire la limite cherchée.

c) Utiliser la même méthode pour déterminer la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{\sqrt{1 + x} - 1}$  .

**EXERCICE 2 :** On considère le repère orthonormé (O ; I, J) et le cercle trigonométrique. Pour tout point M du quart de cercle situé strictement entre I et J, la tangente au cercle en M coupe (OI) en P ; la tangente au cercle en I coupe (MP) en N. Le point H est le projeté orthogonal de M sur (OI). On pose  $(OI; OM) = x$  . Faire une figure.

a) Déterminer l'aire  $S_1(x)$  du triangle HMP en fonction de  $x$

b) Déterminer l'aire  $S_2(x)$  du triangle NIP en fonction de  $x$ .

c) Etudier la limite éventuelle du rapport des aires  $\frac{S_1(x)}{S_2(x)}$  lorsque  $x$  tend vers 0, puis lorsque  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  .