CORRECTION DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE S 3

PARTIE A : 1. La construction de MNP est possible si MN est inférieure à MP + NP = 2MP, soit $1-2x \leq 2x$, soit $x \geq 1/4$ et si M est sur [AI], soit x dans [0 ; ½] ; donc la construction du triangle est possible si $x \in$ [¼ ; ½].

2. Le triangle MNP est isocèle en P et I milieu de [MN], donc [IP] est une hauteur de MNP ; on calcule IP en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle IMP rectangle en I : IP² = MP² − MI² = $x^2 - (½ - x)^2 = x - ¼$; et l'aire $a(x)$ est (MN **x** IP)/2 = $\dfrac{(1-2x)\sqrt{x-\frac{1}{4}}}{2} = \dfrac{(1-2x)\sqrt{4x-1}}{4}$.

4. Le polygone intérieur à ABCD dont les côtés sont [AM], [MP], [PN], [NB], ... est constitué de 16 côtés tous égaux à x , donc $p(x) = 16x$. L'aire $s(x)$ de ce polygone est l'aire du carré ABCD moins les aires des 4 triangles isométriques à MNP ; donc $s(x) = 1 - 4a(x) = 1-(1-2x)\sqrt{4x-1}$.

5. La fonction s est dérivable sur]¼ ; ½] comme somme et produit de fonctions qui le sont. Sa dérivée est $s'(x) = -(-2\sqrt{4x-1}+(1-2x)\dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}}) = \dfrac{4(3x-1)}{\sqrt{4x-1}}$. Le dénominateur est strictement positif, et le numérateur s'annule pour x= 1/3 en changeant de signes ; donc s est décroissante sur]¼ ; 1/3] et croissante sur [1/3 ; ½] ; donc cette fonction atteint son minimum pour x= 1/3 et l'aire minimale est $s(1/3) = 1-\dfrac{1}{3\sqrt{3}} = 1-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

PARTIE B : 1. Le nombre de côtés est multiplié par 4 à chaque étape ; donc, pour tout entier naturel n non nul, $c_{n+1} = 4c_n$ et $c_1 = 16$; ainsi (c_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $c_1 = 16$; donc $c_n = 16\times(4)^{n-1} = 4^{n+1}$.

La longueur d'un côté est multiplié par x à chaque étape ; donc pour tout entier naturel n non nul, $l_{n+1} = xl_n$ et $l_1 = x$; ainsi (l_n) est une suite géométrique de raison x et de premier terme $l_1 = x$; donc $l_n = x\times(x)^{n-1} = x^n$.

Le nombre de triangles nouvellement construits correspond au nombre de côtés à l'étape précédente, donc pour tout entier naturel n non nul, $t_n = c_{n-1}$. Ainsi $t_n = 4^n$.

Le périmètre du polygone est le produit du nombre de côtés par la longueur d'un côté, soit pour tout entier naturel n non nul, $p_n = c_n \times l_n = 4^{n+1}\times x^n = 4(4x)^n$.

L'aire du polygone à l'étape n est l'aire du polygone à l'étape précédente moins l'aire de tous les triangles construits à l'étape n, soit $a_n = a_{n-1} - t_n \times$ aire d'un triangle nouvellement construit. Soit s_n l'aire d'un triangle nouvellement construit à l'étape n . Ce triangle est semblable à MNP, sa base vaut $l_{n-1} - 2l_n$ et la hauteur relative à cette base vaut $\sqrt{l_n^2 - (\frac{1}{2}l_{n-1} - l_n)^2} = \sqrt{x^{2n-2}(x-\frac{1}{4})}$, d'où $s_n = \dfrac{1}{2}(x^{n-1}-2x^n)\sqrt{x^{2n-2}(x-\frac{1}{4})} = \dfrac{(x^{n-1}-2x^n)}{4}x^{n-1}\sqrt{(4x-1)}$.

Donc l'aire du polygone est $a_n = a_{n-1} - t_n \times s_n = a_{n-1} - 4^n \times \dfrac{(1-2x)}{4}x^{2n-2}\sqrt{(4x-1)} =$

$$a_0 - \sum_{k=1}^{k=n}\left[4^k x^{2k-2}\times\frac{(1-2x)}{4}\sqrt{(4x-1)}\right] = 1-\sqrt{4x-1}\,\frac{(1-2x)}{4}\sum_{k=1}^{k=n}\left[4^k x^{2k-2}\right].$$

2. Comme $x \in$ [¼ ; ½], $4x$ est supérieur à 1. Si x = ¼ , alors pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 4$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 4$; $a_n = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. Si x = ½ , $p_n = 4\times 2^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$; $a_n = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Si $¼ < x < ½$, (p_n) est une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

Pour la limite de a_n , étudions $\sum\limits_{k=1}^{k=n}\left[4^k x^{2k-2}\right] = \dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{k=1}^{k=n}(4x^2)^k$; la somme qui apparaît est la somme des termes d'une suite géométrique ; on a $\sum\limits_{k=1}^{k=n}(4x^2)^k = (4x^2)\dfrac{1-(4x^2)^n}{1-4x^2}$; ainsi $a_n = 1-\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{4x-1}\times\dfrac{4(1-(4x^2)^n)}{1-4x^2}$

On a $¼ < 4x^2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(4x^2)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1-\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{4x-1}\times\dfrac{4}{1-4x^2} = 1-\dfrac{\sqrt{4x-1}}{1+2x}$.

Et si x = 1/3 , on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. Lorsque n tend vers l'infini, ce polygone s'appelle le fractal de Cesaro (mathématicien italien 1859 - 1906) ; on obtient un polygone de périmètre infini et d'aire finie !

Notons que si x = ½ , l'aire est égale à 1, et le périmètre tend tout de même vers l'infini !!