DEVOIR MAISON N° 5 TERMINALE S 3

EXERCICE 1

a) Déterminer les nombres complexes z non nuls, tels que z , $1/z$ et $1 - z$ aient le même module.

b) Montrer que si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, alors le nombre complexe $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

EXERCICE 2

a) On considère l'équation (E) : $x^3 = 3x + 1$. Montrer que l'équation (E) a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

b) On considère la fonction f définie par $f(u) = \sin(2u)$. Montrer que la fonction f est croissante sur [$\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}$].

c) Montrer que $\sin(3u) = 3\sin u - 4\sin^3 u$ (Utiliser les formules d'addition des sinus et cosinus) .

d) En posant $x = 2\sin u$, montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $1 + 2\sin(3u) = 0$.

e) Résoudre l'équation (E') et trouver les valeurs exactes des trois solutions de (E).

EXERCICE 3

On considère le nombre complexe $z = a + ib$ tel que a et b sont des réels et le module de z est égale à 1.

a) Montrer que $a^2 = \frac{1 + Re(z^2)}{2}$ et $b^2 = \frac{1 - Re(z^2)}{2}$.

b) On pose $a = cos(\frac{\pi}{8})$ et $b = sin(\frac{\pi}{8})$. Ecrire z^2 sous la forme trigonométrique et en déduire les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{8})$ et de $sin(\frac{\pi}{8})$.