CORRECTION DEVOIR MAISON N° 5 TERMINALE S 3

EXERCICE 1

a) Si $|z| = 1/|z|$, alors $|z|^2 = 1$; soit $|z| = 1$; donc, si $z = x + iy$, alors $x^2 + y^2 = 1$;
et $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 = 1 + x^2 - 2x + y^2 = 2 - 2x = |z|^2 = 1$; donc $x = ½$ et $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi les nombres complexes z non nuls, tels que z , $1/z$ et $1 - z$ ont le même module sont les nombres $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

b) On a $|z| = 1$ et $z \neq 1$; si $z = x + iy$, alors $x^2 + y^2 = 1$; alors $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x-iy)(1-x+iy)} =$
$\frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{2iy}{2-2x} = \frac{2y}{2-2x}i$ est imaginaire pur.

EXERCICE 2

a)L'équation (E) : $x^3 = 3x+1$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$. Posons $g(x) = x^3 - 3x - 1$; la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme du troisième degré. On a $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est continue et strictement croissante de $]-\infty ; -1]$ dans $]-\infty ; 1]$ et $0 \in]-\infty ; 1]$, donc l'équation $g(x) = 0$ a une solution dans $]-\infty ; -1[$; comme $g(-2) = -3$, la solution est dans $]-2 ; -1[$; de même, il existe une solution dans l'intervalle $]-1 ; 1[$ et dans l'intervalle $]1 ; 2[$. Donc l'équation (E) a bien trois solutions dans $\mathbb{R}$, ces solutions sont dans $]-2 ; 2[$. Des valeurs approchées sont -1,532 ; -0,347 ; 1,879.

b) La fonction f définie par $f(u) = 2\sin(u)$ est la composée de la fonction sinus et de la fonction : $x \mapsto 2x$, ces deux fonctions sont croissantes sur $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, donc f est croissante de $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dans $[-2 ; 2]$.

c) On utilise les formules d'addition des sinus et cosinus :
$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a + b) = \cos a\sin b + \cos b\sin a$.
D'où $\sin(3u) = \sin(2u + u) = \cos(2u)\sin u + \sin(2u)\cos u = (\cos^2 u - \sin^2 u)\sin u + \cos u(2\cos u\sin u) = 3\cos^2 u\sin u - \sin^3 u =$
$3(1 - \sin^2 u)\sin u - \sin^3 u = 3\sin u - 4\sin^3 u$.

d) En posant $x = 2\sin u$, il vient $x^3 - 3x - 1 = 8\sin^3 u - 6\sin u - 1 = 2(4\sin^3 u - 3\sin u) - 1 = -2\sin(3u) - 1$; comme les solutions de (E) sont dans $]-2 ; 2[$, alors (E) est équivalente à (E') : $1 + 2\sin(3u) = 0$, avec u dans $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

e) De $1 + 2\sin(3u) = 0$, on tire $\sin(3u) = -½$, d'où $3u = -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$, ou $3u = \pi - \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$; avec u dans $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
soit $u = -\frac{\pi}{18}$ $[\frac{2\pi}{3}]$, ou $u = -\frac{5\pi}{18}$ $[\frac{2\pi}{3}]$. Les solutions sont donc $\{-\frac{\pi}{18}, -\frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\}$. Ainsi les valeurs exactes des trois solutions de (E) sont $\{2\sin(\frac{-\pi}{18}), 2\sin(\frac{-5\pi}{18}), 2\sin(\frac{7\pi}{18})\}$.

EXERCICE 3

a) On a $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2ib$; donc $Re(z^2) = a^2 - b^2$ et comme le module de z est égale à 1, $a^2 + b^2 = 1$;
de $Re(z^2) = a^2 - b^2$ et $a^2 + b^2 = 1$, on tire $2a^2 = 1 + Re(z^2)$, et $2b^2 = 1 - Re(z^2)$,
donc $a^2 = \frac{1+Re(z^2)}{2}$ et $b^2 = \frac{1-Re(z^2)}{2}$.

b) Si $a = \cos(\frac{\pi}{8})$ et $b = \sin(\frac{\pi}{8})$, alors $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$, d'où $z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. En utilisant la première question, il vient $a^2 = \frac{1+Re(z^2)}{2} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $b^2 = \frac{1-Re(z^2)}{2} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$;
ainsi $\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.