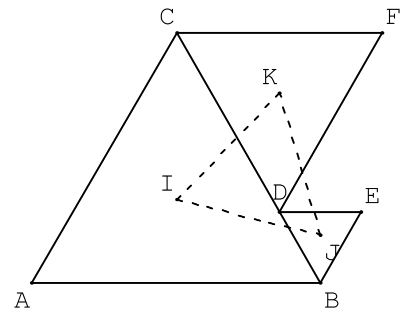
PARTIE A :

1. Si R est le centre de gravité du triangle MNP, alors $\overrightarrow{OR} = \dfrac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}}{3}$; donc $z_R = (z_M + z_N + z_P)/3$.

2. L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (car la hauteur est égale à $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$) ; ici le côté du triangle équilatéral MNP est MN = $| z_N - z_M |$; donc l'aire de MNP est $\dfrac{|z_N - z_M|^2\sqrt{3}}{4}$.



PARTIE B : 1. La figure avec $x = 1/3$ ci-contre :

On choisit alors le repère orthonormé (A ; $\vec{u}, \vec{v}$) avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

2. Dans ce repère, on a les affixes des points A, B, C, D, E, F, I, J, K :

$z_A = 0$; $z_B = 1$; $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} z_B = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$z_D = \dfrac{-x}{2} + 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ (car $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{OD} = x(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}$) ;

$z_E - z_B = e^{i\frac{-\pi}{3}} (z_D - z_B)$, d'où $z_E = (\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(\dfrac{-x}{2} + 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{2} - 1) + 1 = \dfrac{x}{2} + 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

$z_F - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_D - z_C)$, d'où $z_F = (\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(\dfrac{-x}{2} + 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} - x + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_I = (z_A + z_B + z_C)/3 = \dfrac{0 + 1 + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

$z_J = (z_B + z_D + z_E)/3 = \dfrac{1 + \dfrac{-x}{2} + 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{x}{2} + 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}{3} = 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$;

$z_K = (z_C + z_D + z_F)/3 = \dfrac{\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-x}{2} + 1 + i\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} - x + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{3} = 1 - \dfrac{x}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$.

3. On a $z_K - z_I = \dfrac{-x}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}(1+x)$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I) = (\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}(2x-1)) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+1)$; d'où l'égalité demandée.

4. Cette relation caractérise une rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; donc K est l'image de J par cette rotation, donc IJ = IK et l'angle $(\overrightarrow{IJ} ; \overrightarrow{IK}) = \dfrac{\pi}{3}$; donc le triangle IJK est équilatéral.

5. D'après la partie A, l'aire S(x) du triangle IJK est $\dfrac{|z_J - z_I|^2\sqrt{3}}{4}$; on a $| z_I - z_J |^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{36}(2x-1)^2 = \dfrac{x^2 - x + 1}{3}$. Ainsi $S(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)\sqrt{3}}{12}$.

6. Cette fonction S est définie sur [0 ; 1] et elle est dérivable sur cet intervalle puisqu'il s'agit d'un polynôme du second degré. On a $S'(x) = \dfrac{(2x-1)\sqrt{3}}{12}$ qui s'annule pour $x = ½$; S est décroissante sur [0 ; ½] et croissante sur [½ ; 1]. Le minimum de S est S(½) = $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$; et le maximum est S(0) = S(1) = $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.