DEVOIR MAISON N° 9 TERMINALES S 3

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions notées f_n, qui sont définies pour x dans $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{1+n\ln x}{x^2}$ et C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

PARTIE A : 1. Etudier les variations des fonctions f_n en fonction de n.
2. Déterminer les limites des fonctions f_n aux bornes de leur ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variations de ces fonctions et préciser le maximum en fonction de n.
4. Tracer les courbes C_1, C_2, C_3 dans le même repère.
5. Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence dépend-elle de n ?
6. Expliquer comment il est possible de tracer C_4 à partir des courbes C_2 et C_3. Tracer C_4.

PARTIE B : 1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
2. En déduire l'aire, en cm², du domaine plan limité par les courbes C_n et C_{n-1} et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
3. On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes C_n et les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$. Calculer A_2.
4. Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de la raison.

PARTIE C : Dans cette partie, on prendra n entier supérieur ou égal à 3.
1. Vérifier que, pour tout n, $\exp(\frac{n-2}{2n}) > 1$ et $f_n(\exp(\frac{n-2}{2n})) > 1$.

2. Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solutions dans l'intervalle $]\,1\,;\,\exp(\frac{n-2}{2n})\,[$.

3. On admet que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[\,\exp(\frac{n-2}{2n})\,;+\infty\,[$.

Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$. En déduire que, pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).