DEVOIR SURVEILLE N° 3 **TERMINALE S 3** ***Mardi 18 novembre 2003***

EXERCICE 1 (10 points)

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u},\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm).

a) On considère le point A d'affixe $a = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$; écrire a sous forme algébrique.

b) On considère le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$; écrire b sous forme exponentielle complexe.

c) Déterminer le module $|\, a - b \,|$.

d) Placer les points A et B dans le plan. Quelles est la nature du triangle AOB ?

e) Montrer que a^3 et b^3 sont des nombres réels positifs.

2. On considère un point M du plan différent de O, d'affixe z . On note θ un argument de z. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z^3 soit un réel positif.

3. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On note j la solution dont la partie imaginaire est strictement positive.

b) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

EXERCICE 2 (10 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) + f(x) = 1$. En déduire que C admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes à C.

d) Déterminer les variations de la fonction f ; dresser son tableau de variations.

e) Montrer que pour tout a de $]0\,;1[$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = a$.

2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C, il suffit d'étudier le signe de $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.

c) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

d) Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$.

e) En déduire la position de T par rapport à C.