CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 3 TERMINALE S 3

EXERCICE 1 : 1. a) On écrit $a = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2(cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\,sin(-\frac{2\pi}{3})) = 2(\frac{-1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}) = -1 - i\sqrt{3}$.

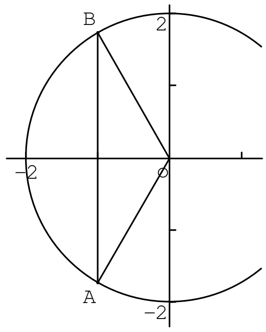
b) On a | b | = 2 et si θ = Arg(b), alors cos(θ) = $\frac{-1}{2}$ et sin(θ) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où θ = $\frac{2\pi}{3}$ [2π] et $b = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

c) On a $a - b = -1 - i\sqrt{3} - (-1 + i\sqrt{3}) = -2i\sqrt{3}$, et | $a - b$ | $= 2\sqrt{3}$.

d) On a OA = | a | = 2 et OB = | b | = 2 ; AB = | $a - b$ | $= 2\sqrt{3}$, donc le triangle AOB est isocèle en O.

e) $a^3 = (2e^{-i\frac{2\pi}{3}})^3 = 2^3 \times e^{-i2\pi} = 8(1 + 0i) = 8$ et $b^3 = (2e^{i\frac{2\pi}{3}})^3 = 2^3 \times e^{i2\pi} = 8$; donc a^3 et b^3 sont bien des réels positifs.

2. On a $z = \rho e^{i\theta}$; d'où $z^3 = (\rho e^{i\theta})^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$. Ce complexe est un réel positif si et seulement si son argument est égal à 0 [2π], soit 3θ = 0 [2π] ou θ = 0 [$\frac{2\pi}{3}$] , soit θ = $\frac{2\pi}{3} k$ avec $k \in$ ¢ .



3. a) L'équation $z^3 = 1$ est équivalente à $z^3 - 1 = 0$. 1 est une solution évidente, donc $z^3 - 1$ se factorise par $z - 1$; on obtient : $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$; on résout $z^2 + z + 1 = 0$;

Δ = -3, il y a donc deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$;

d'où $j = z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

b) $1 + j + j^2 = 1 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{1 - 3 - 2i\sqrt{3}}{4} = 0$.

EXERCICE 2 : 1. a) Pour tout x de IR, $f(-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1/e^x}{1 + 1/e^x} + \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} = 1$. Comme pour tout x de IR, on a $f(0 - x) + f(0 + x) = 2 \times \frac{1}{2}$, alors C admet le point de coordonnées (0 ; ½) comme centre de symétrie. b) Pour tout x de IR, $\frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{1/e^x + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x} = f(x)$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$; ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{1} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à C en +∞.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{0}{1 + 0} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à C en -∞.

d) La fonction f est dérivable sur IR comme quotient de fonctions dérivables sur IR .

$f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$; le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc $f'(x) > 0$ sur IR . Tableau de variations :

x	-∞	+∞
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	1

e) La fonction f est donc continue et strictement monotone de IR dans]0 ; 1[, donc pour tout a de]0 ; 1[, il existe un unique réel x tel que $f(x) = a$.

2. a) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x/4 + \frac{1}{2}$.

b) Pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C, il suffit de connaître le signe de $f(x) - (\frac{x}{4} + \frac{1}{2}) =$

$\frac{e^x}{1 + e^x} - (\frac{x + 2}{4}) = \frac{4e^x - (x + 2)(1 + e^x)}{4(1 + e^x)} = \frac{2e^x - xe^x - 2 - x}{4(1 + e^x)}$; comme le dénominateur est strictement positif, il suffit de connaître le signe de $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.

c) On a $g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x - 1 = e^x - xe^x - 1$ et $g''(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.

d) Le signe de $g''(x)$ est donné par le signe de $-x$; soit $g''(x) > 0$ si $x < 0$ et $g''(x) < 0$ si $x > 0$. Donc la fonction g' est croissante sur]−∞ ; 0 [et décroissante sur]0 ; +∞[; elle admet un maximum pour $x = 0$, soit $g'(0) = 0$; donc pour tout x réel, $g'(x)$ est négatif ; donc la fonction g est décroissante sur IR ; de plus $g(0) = 0$, donc $g(x) > 0$ sur]−∞ ; 0 [et $g(x) < 0$ sur]0 ; +∞[.

e) Ainsi la tangente T est au-dessus de C pour $x > 0$ et T est au-dessous de C pour $x < 0$.