DEVOIR SURVEILLE N° 4 **TERMINALE S 3** ***Mardi 16 décembre 2003***

EXERCICE 1 (10 points)

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur la chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut.
Des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur (sans qu'il y ait d'incident) est égale à $\frac{1}{50}$;
- la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\frac{1}{500}$;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à 0,01.

On note A l'événement : « L'alarme se déclenche », I l'événement : « Un incident se produit », et $\overline{A}$, $\overline{I}$ leur événement contraire.

PARTIE A : 1.a) Réaliser un arbre et préciser les probabilités sur les branches de cet arbre.
b) Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
c) En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
2. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
3. L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

PARTIE B : Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

- 10 000 euros pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ;
- 15 000 euros pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ;
- 100 euros lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour. X est la variable aléatoire représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 (10 points)

PARTIE A : On considère la fonction g définie sur] 0 ; +∞ [par $g(x) = x^2 - \ln x$.
1. Etudier les variations de g (on ne demande pas les limites aux bornes de son ensemble de définition).
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur] 0 ; +∞ [.

PARTIE B : On considère la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} + x$.
1. Etudier les variations de la fonction f en utilisant la partie A.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f .
4. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (d) sur] 0 ; +∞ [.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
6. Montrer que, pour $x \geq \frac{1}{e}$, la courbe $\mathcal{C}$ est située entre les droites (d) et T.

PARTIE C : On considère les quatre réels a_1, a_2, a_3, a_4 définis par :
a_1 est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de (d) ;
a_2 est l'abscisse du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par l'origine du repère ;
a_3 est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de T ;
a_4 est solution de l'équation $f''(x) = 0$, où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f .
1. Déterminer les réels a_1, a_2, a_3, a_4 .
2. Montrer que ces réels sont des termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.