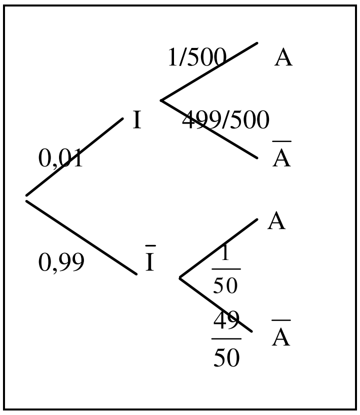
CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 4 TERMINALE S 3



EXERCICE 1 : PARTIE A : 1.a) Réalisation de l'arbre.
b) La probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche est $p(A\cap I) = 0,01 \times 1/500 = 1/50000$.
c) La probabilité que l'alarme se déclenche est $p(A) = p(A\cap I) + p(A\cap \bar{I}) =$
$1/5000 + 0,99 \times 1/50 = 1489/50000 = 0,02978$.
2. La probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut est :
$p(\bar{A}\cap I) + p(A\cap \bar{I}) = 0,99 \times 49/50 + 0,99 \times 1/50 = 991/50000 = 0,01982$.
3.. La probabilité qu'il y ait réellement un incident sachant que l'alarme vient de se déclencher est $p_A(I) = \dfrac{p(A\cap I)}{p(A)} = \dfrac{499}{50000}\times\dfrac{50000}{1489} = \dfrac{499}{1489}$.

PARTIE B : a) La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 100, 10000, 15000,
avec les probabilités : $p(X = 0) = p(\bar{A}\cap\bar{I}) = \dfrac{99}{100}\times\dfrac{49}{50} = \dfrac{4861}{5000}$; $p(X = 100) = p(A\cap\bar{I}) = \dfrac{99}{5000}$;
$p(X = 10000) = p(A\cap I) = \dfrac{499}{500}\times\dfrac{1}{100} = \dfrac{499}{50000}$ et $p(X = 15000) = p(\bar{A}\cap I) = \dfrac{1}{50000}$.
b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 100 \times p(X = 100) + 10000 \times p(X = 10000) +$
$15000 \times p(X = 15000) = 5104/50 = 102,08$ euros .

EXERCICE 2 : PARTIE A : On considère la fonction g définie sur] 0 ; +∞ [par $g(x) = x^2 - \ln x$.

1. La fonction g est dérivable sur] 0 ; +∞ [comme somme de fonctions qui le sont ; et $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$.
Cette dérivée s'annule pour $x = \pm\sqrt{2}/2$; elle est positive sur] -∞ ; $-\sqrt{2}/2$] ∪ [$\sqrt{2}/2$; +∞ [et négative sur [$-\sqrt{2}/2$; $\sqrt{2}/2$] ; la fonction g est donc décroissante sur]0 ; $\sqrt{2}/2$] et croissante sur [$\sqrt{2}/2$; +∞ [; elle admet donc un minimum en $x = \sqrt{2}/2$ qui vaut $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\ln 2)$.
2. Le minimum de g est strictement positif, donc $g(x) > 0$ sur] 0 ; +∞ [.

PARTIE B : 1. La fonction f est dérivable sur] 0 ; +∞ [comme somme et quotient de fonctions qui le sont ; et $f'(x) = \dfrac{1-1-\ln x}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$. Donc le signe de f' est celui de g ; ainsi la fonction f est strictement croissante sur] 0 ; +∞ [.
2. On a $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} + x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; on a $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln x}{x} = -\infty$,
donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{x} = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C .

4. La position de C par rapport à (d) sur] 0 ; +∞ [est déterminée par le signe de $f(x) - x = \dfrac{1+\ln x}{x}$. Cette quantité s'annule lorsque $1 + \ln x = 0$ soit $x = 1/e$. Ainsi, (d) est au-dessus de C lorsque $x < 1/e$ et (d) est au-dessous de C lorsque $x > 1/e$.
5. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est donnée par $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x + 1$.
6. On sait que, pour $x \geq \dfrac{1}{e}$, la courbe C est située au-dessus de (d) ; de plus, pour $x \geq \dfrac{1}{e}$, $f(x) - (x + 1) =$
$\dfrac{1+\ln x}{x} + x - x - 1 = \dfrac{1+\ln x - x}{x} < 0$ (par l'étude de $x \mapsto 1 + \ln x - x$ sur] 0 ; +∞ [ ) ; donc C est située au-dessous de T .

PARTIE C : $a_1 = 1/e$ (vu à la question B.4) ; a_2 vérifie : $f'(a_2)(-a_2) + f(a_2) = 0$; soit
$\dfrac{\ln(a_2) - a_2^{\,2}}{a_2^{\,2}}\times(-a_2^{\,2}) + \dfrac{1+\ln a_2}{a_2} + a_2 = \dfrac{1+2\ln a_2}{a_2} = 0$; et on trouve $a_2 = e^{-\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{e}$; $a_3 = 1$ (vu en B.5); on a
$f''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$ s'annule pour $a_4 = e^{1/2} = \sqrt{e}$; ces réels vérifient : $a_{n+1} = a_n\sqrt{e}$ pour n = 1, 2, 3.