EXERCICE 1 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n non nul par $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e$. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de (u_n) .

4. a) On pose $v_n = \ln u_n$. Exprimer la somme $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ en fonction de n.

b) En déduire l'expression du produit $s_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$. Etudier la limite de (s_n) .

EXERCICE 2 (3 points)

On considère le nombre réel θ dans l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$. Déterminer le module et un argument de $z_1 = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$ et de $z_2 = \dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit le nombre complexe $u = 1 + i$.

1. Ecrire u et $\overline{u}$ sous forme exponentielle.

2. Soit n un entier naturel. On pose $S_n = u^n + \overline{u}^n$.

a) Donner une écriture de S_n à l'aide des exponentielles complexes.

b) En déduire que $S_n = \lambda_n \cos(n\dfrac{\pi}{4})$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de n.

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

d) Prouver que si n est pair, S_n est un entier relatif.

EXERCICE 4 (7 points)

Alain et Bernard jouent au jeu suivant : On lance deux pièces simultanément ; si l'on obtient deux faces, Alain gagne et le jeu s'arrête, si l'on obtient deux piles Bernard gagne et le jeu s'arrête, et si l'on obtient un pile et un face, on recommence. Pour les deux pièces, les probabilités d'obtenir pile ou face sont égales.

On note les événements :

A_1 : « Alain gagne au premier lancer ».

B_1 : « Bernard gagne au premier lancer ».

C_1 : « la partie continue après le premier lancer ».

1. Calculer les probabilités des événements A_1, B_1, C_1.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note les événements :

A_n : « Alain gagne au n-ième lancer ».

B_n : « Bernard gagne au n-ième lancer ».

C_n : « la partie continue après le n-ième lancer ».

a) Calculer les probabilités conditionnelles : $p_{C_1}(A_2)$, $p_{C_1}(B_2)$, $p_{C_1}(C_2)$.

b) Pour tout $n > 1$, calculer les probabilités conditionnelles : $p_{C_{n-1}}(A_n)$, $p_{C_{n-1}}(B_n)$, $p_{C_{n-1}}(C_n)$.

c) Montrer que, pour tout $n > 1$, $p(C_n) = p(C_n \cap C_{n-1})$. En déduire les probabilités $p(C_n)$ puis $p(A_n)$ et $p(B_n)$.

3. a) Montrer que la probabilité p_n pour que Bernard gagne au cours des n premières parties est $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^{k+1}}$.

b) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de p_n .