DEVOIR MAISON N° 10   TERMINALE S 3

EXERCICE 1:

1. Soit x un réel positif. On pose $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+1}dt$. Montrer que pour tout réel x positif, $\frac{e^x}{x+1} \geq 1$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur **R**+ .
3. Prouver que $f(2) \geq 1$.
4. En déduire qu'il existe un réel c appartenant à [1; 2] tel que $f(c) = 1$.

EXERCICE 2:

Sit n un entier naturel. On définit la fonction f_n sur $[1; e]$ en posant $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On pose alors $I_n = \int_1^e f_n(t)dt$.

1. Montrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
2. Prouver que $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
3. En encadrant $(\ln x)^n$ sur $[1; e]$, montrer que $0 \leq I_n \leq 1$.
4. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$.
5. Prouver que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

EXERCICE 3:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
On considère la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \sin^2 x$.
Le domaine (D) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

1. Représenter graphiquement le domaine (D).

Rappels : Pour tout a réel , $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$.

2. Exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$, puis $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} \sin^4(t)dt$.
4. La courbe (C) en tournant autour de l'axe (Ox) engendre un solide (S) dont on déterminera le volume en cm^3 .