**CORRECTION DEVOIR MAISON N° 10 TERMINALE S 3**

**EXERCICE 1 :** 1. Considérons la fonction $f$ définie sur [0; +∞[ par $f(x) = e^x - (x + 1)$. Cette fonction est dérivable sur [0; +∞[ comme somme de fonctions dérivables. $f'(x) = e^x - 1$ qui s'annule en $x = 0$ et est positif sur [0; +∞[ ; donc la fonction $f$ est croissante sur [0; +∞[ et son mimimum est $f(0) = 0$, donc elle est positive sur [0; +∞[ ; ainsi $e^x \le x + 1$, et comme $x + 1 > 0$, en divisant par $x + 1$, on obtient $\frac{e^x}{x+1} \ge 1$.

2. Pour $x$ positif, la fonction $f$ est la primitive de la fonction qui à $t$ associe $\frac{e^t}{t+1}$, qui s'annule en $x = 1$; donc la fonction $f$ est dérivable et $f'(x) = \frac{e^x}{x+1}$. La fonction étant dérivable, elle est continue sur [0; +∞[ = **R**+ .

3. $f(2) = \int_1^2 \frac{e^t}{t+1}dt \ge \int_1^2 1\ dt = [\ t\ ]_1^2 = 1$, en utilisant les propriétés de l'intégrale et la question 1.

4. On a $f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t+1}dt = 0$; la fonction $f$ est continue de [1; 2] dans [ $f(1)$; $f(2)$] = [0; $f(2)$] avec $f(2) \ge 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k$ dans [0; $f(2)$] il existe un réel $c$ de [1; 2] tel que $f(c) = k$; or $1 \in [0; f(2)]$ donc il existe un réel $c$ de [1; 2] tel que $f(c) = 1$.

**EXERCICE 2:** 1. $I_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(t)dt = \int_1^e \frac{(\ln t)^{n+1}}{t^2}dt$ . On utilise une intégration par parties en posant $u' = \frac{1}{x^2}$ et $v = (\ln x)^{n+1}$ ; d'où $u = \frac{-1}{x}$ et $v' = (n + 1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$ .

Ainsi $I_{n+1} = \left[\frac{-(\ln t)^{n+1}}{t}dt\right]_e^1 - \int_1^e \frac{-(n+1)(\ln t)^n}{t}dt = -\frac{1}{e} + (n + 1)\int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t}dt = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ .

2. Utilisons la récurrence pour montrer que $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ : Pour $n = 0$, $\frac{1}{0!}I_0 = I_0 = \int_1^e \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{-1}{t}dt\right]_e^1 = 1 - \frac{1}{e}$ et $1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{e}$ ; donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Supposons que, pour un certain $n$, $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et montrons que cette propriété est vraie pour $n + 1$:

$\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(-\frac{1}{e} + (n+1)I_n) = \frac{1}{(n+1)!}(\frac{-1}{e}) + \frac{1}{n!}I_n = \frac{1}{(n+1)!}(\frac{-1}{e}) + 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}$ .

Donc la propriété est vraie pour tout entier naturel $n$.

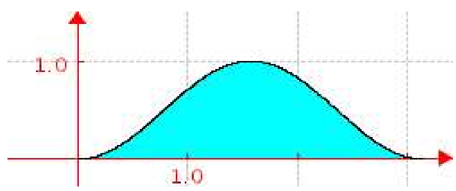
3. Les fonctions $\ln x$ et $x \mapsto x^n$ sont croissantes sur [1; $e$], donc $\ln 1 \le (\ln x)^n \le \ln e$, soit $0 \le (\ln x)^n \le 1$.

Par les propriétés de l'intégrale, on a $\int_1^e \frac{0}{t^2}dt \le I_n \le \int_1^e \frac{1}{t^2}dt$ , d'où $0 \le I_n \le \left[\frac{-1}{t}dt\right]_e^1 = 1 - \frac{1}{e} < 1$.

4. On a $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$ , donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!} = 0$. Comme $0 \le \frac{I_n}{n!} \le \frac{1}{n!}$ , par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{n!} = 0$.

5. $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$ .

**EXERCICE 3:** 1. Représentation graphique du domaine (D):




2. De $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ , on tire $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ , et $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ ; puis $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} = \frac{1-2\cos(2x)+\frac{\cos(4x)+1}{2}}{4} = \frac{3-4\cos(2x)+\cos(4x)}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}$ .

3. Un primitive de $\cos(2x)$ est $\frac{1}{2}\sin(2x)$ et une primitive de $\cos(4x)$ est $\frac{1}{4}\sin(4x)$ , donc $\int_0^\pi \sin^4(t)dt = \int_0^\pi (\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t))dt = \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4t)\right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8}$ .

4. La courbe (C) en tournant autour de l'axe (O$x$) engendre un solide (S) dont le volume est déterminé par $\int_0^\pi \pi(\sin^2)^2(t)dt = \pi\int_0^\pi \sin^4(t)dt = \frac{3\pi^2}{8}$ unités de volume = $3\pi^2$ cm³ ( puisque l'unité du repère est de 2 cm).