EXERCICE 1 : a) la droite (d) étant perpendiculaire à (P) a pour vecteur directeur un vecteur normal à (P), soit $\vec{n}$ (1; 1; – 3). Elle passe par S, donc une représentation paramétrique de (d) est: $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3t \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$.

b) Les coordonnées du point H, intersection de (d) et de (P) vérifient l'équation de (P) et la représentation paramétrique de (d), soit 2 + t – 1 + t - 3(- 3t) + 4 = 0 ; on trouve $t = \frac{-5}{11}$.

D'où les coordonnées de H : ($\frac{17}{11}$; $\frac{-16}{11}$; $\frac{15}{11}$).

c) La distance du point S au plan (P) est SH puisque H est le projeté orthogonal de S sur (P); SH = $\sqrt{(x_H-x_S)^2+(y_H-y_S)^2+(z_H-z_S)^2} = \sqrt{\left(\frac{-5}{11}\right)^2+\left(\frac{-5}{11}\right)^2+\left(\frac{15}{11}\right)^2} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$.

d) Comme $\frac{5\sqrt{11}}{11} < 4$, alors la sphère coupe le plan (P) suivant un cercle de centre H et de rayon r tel que : Si A est un point de ce cercle, le triangle ASH est rectangle en H, avec SA = 4 et SH = $\frac{5\sqrt{11}}{11}$. Le rayon cherché est r = AH ; on utilise le théorème de Pythagore : AH² = SA² – SH² = 16 – $\frac{25}{11} = \frac{151}{11}$; donc le rayon est $r = \sqrt{\frac{151}{11}}$.

EXERCICE 2 :

1. On a AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$; de même AC = $\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; et BC = $\sqrt{0^2+(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; on vérifie que BC² = AB² + AC², donc ABC est rectangle en A.

2. a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (3; 3; 3) = 3(1; 1; 1) et le vecteur $\vec{n}$ (1; 1; 1) est un vecteur normal au plan (P); $\vec{n}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ donc (P) est orthogonal à la droite (AB); de plus les coordonnées du point B vérifie l'équation de (P) : 5 + 0 + 4 – 9 = 0 donc (P) passe par le point B.
b) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ (0; – 3; – 6) est un vecteur normal au plan (P'); une équation de (P') est donc $-3y-6z+d=0$; pour déterminer la valeur de d, on remplace x, y, z par les coordonnées de B : – 3×0 – 6×4 + d = 0; soit d = 24.
Une équation cartésienne de (P') est – 3y – 6z + 24 = 0 , ou en divisant les deux membres par -3 : y + 2z – 8 = 0 .
c) Les points situés sur la droite (d) intersection des plans (P) et (P') ont des coordonnées vérifiant le système :
$\begin{cases} x+y+z-9=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$ On cherche à écrire deux des inconnues en fonction de la troisième qui sera alors égale au paramètre k : la deuxième équation nous donne y = – 2z + 8 et en remplaçant dans la première équation : x – 2z + 8 + z – 9 = 0, soit x = z + 1.
Une représentation paramétrique de (d) est : $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+8 \\ z=t \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$.

3. a) Pour montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), on montre que (AD) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (ABC). Pour cela, calculons les produits scalaires: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AD}$ (– 3; 6; – 3).
Ainsi $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ = (– 3)×3 + 6×3 + (– 3)×3 = 0 et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ = (– 3)×0 + 6×(– 3) + (– 3)×(– 6) = 0 ; donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$; donc la droite (AD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), donc elle est perpendiculaire à (ABC).
b) Le volume d'un tétraèdre est égal à 1/3 de l'aire de la base par la hauteur, ici l'aire du tétraèdre ABCD est égale à $\frac{1}{3}\times\frac{AB\times AC}{2}\times AD = \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}\times3\sqrt{6} = 27$.
c) Le produit scalaire $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ = DB×DC cos($\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}$) , soit cos($\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}$) = $\frac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}}{DB\times DC} = \frac{54}{9\times6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
donc ($\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}$) = ± $\frac{\pi}{4}$ [2π] . Ainsi l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radians.
d) Dans le triangle BDC, soit H le pied de la hauteur issue de C. L'aire du triangle BDC est alors égale à
$\frac{DB\times CH}{2} = \frac{DB\times CD\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{9\times6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 27$.
e) Pour déterminer la distance d du point A au plan (BDC), on utilise la formule du calcul du volume du tétraèdre en prenant pour base le triangle BCD et la hauteur relative est la distance d de A à (BCD).
Soit le volume (ABCD) = $\frac{1}{3}\times\text{aire(BDC)}\times d$ = 27 ; donc $d = \frac{3\times27}{27}$ = 3.

4. a) Le plan (P_1) médiateur de [AB] admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal, et il passe par le point I milieu de [AB]. Coordonnées de I(3,5 ; -1,5 ; 2,5). Une équation de (P_1) est $x + y + z + d = 0$, avec $3{,}5 – 1{,}5 + 2{,}5 + d = 0$, soit $d = – 4{,}5$. Equation de (P_1) : $x + y + z – 4{,}5 = 0$. Le point D appartient à ce plan si ces coordonnées vérifient l'équation du plan : $– 1 + 3 – 2 – 4{,}5 = – 4{,}5 \neq 0$ donc $D \notin (P_1)$.

Le point D est dans le demi-espace vérifiant $x + y + z – 4{,}5 < 0$. C'est le demi-espace contenant A. Autre façon de le justifier: la droite (AD) est perpendiculaire à (AB) qui est orthogonale à (P") donc (AD) est parallèle à (P"), donc A et D sont situés d'un même côté par rapport à (P") .

b) Le centre S de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est le point d'intersection des plans médiateurs de [AB], [AC] et [BD]; Soit (P_2) le plan médiateur de [AC] et (P_3) celui de [BD]. Un vecteur normal à (P_2) est $\overrightarrow{AC}$ (3; 0; – 3) et il passe par le milieu de [AC] de coordonnées (3,5 ; – 3 ; – 0,5); d'où une équation de (P_2) : $x – z – 4 = 0$; Un vecteur normal à (P_3) est $\overrightarrow{DB}$ (6; – 3; 6) et il passe par le milieu de [DB] de coordonnées (2 ; 1,5 ; 1); d'où une équation de (P_3) : $2x – y + 2z – 4{,}5 = 0$.

Les coordonnées du point S vérifient le système:

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=4{,}5 \\ x-z=4 \\ 2x-y+2z=4{,}5 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L'_3=2L_1-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=4{,}5 \\ x-z=4 \\ 3\ y=4{,}5 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L'_3 \end{matrix} \begin{cases} x+z=3 \\ x-z=4 \\ y=1{,}5 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{matrix} L_1 \\ L'_2=L_1+L_2 \\ L'_3 \end{matrix} \begin{cases} x+z=3 \\ 2\ x=7 \\ y=1{,}5 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{matrix} \begin{cases} 3{,}5+z=3 \\ x=3{,}5 \\ y=1{,}5 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=3{,}5 \\ y=1{,}5 \\ z=-0{,}5 \end{cases} .$$

Les coordonnées du centre S de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD sont S(3,5; 1,5 ; – 0,5) et le rayon de cette sphère est égale à SA = $\sqrt{(x_S-x_A)^2+(y_S-y_A)^2+(z_S-z_A)^2}$ = $\sqrt{(1{,}5)^2+(4{,}5)^2+(-1{,}5)^2}$ = $\sqrt{24{,}75}$ = $1{,}5\sqrt{11}$.