CORRECTION DEVOIR MAISON N° 2 TERMINALE S 3

EXERCICE 1 : a) La limite en l'infini d'un polynôme est la limite en cet infini de son terme de plus haut degré ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^2 = +\infty$ si $a > 0$ et $-\infty$ si $a < 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax^2 = +\infty$ si $a > 0$ et $-\infty$ si $a < 0$; dans tous les cas, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$; la courbe C a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

b) La fonction g est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition, et $g'(x) = \dfrac{-2ax-b}{(f(x))^2}$; son signe dépend de $2ax + b$ qui s'annule pour $x = -b/2a$ et $g(-b/2a) = -4a/\Delta$ lorsque $\Delta \neq 0$. Son ensemble de définition est l'ensemble des x tel que $f(x) \neq 0$.

1) $a > 0$ et $\Delta > 0$: f a deux racines réelles x_1 et x_2 telles que $x_1 < -b/2a < x_2$; donc la fonction g a deux valeurs interdites x_1 et x_2 :

x	$-\infty$		x_1		$-b/2a$		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

C a deux asymptotes verticales d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$.

2) $a > 0$ et $\Delta = 0$: f a une racine réelle $-b/2a$; donc la fonction g a une valeur interdite $-b/2a$:

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3) $a > 0$ et $\Delta < 0$: pour tout x réel, $f(x) > 0$; donc g est définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗		↘	0

4) $a < 0$ et $\Delta > 0$: comme le cas 1) sauf que le signe de $g'(x)$ change :

x	$-\infty$		x_1		$-b/2a$		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

5) $a < 0$ et $\Delta = 0$: f a une racine réelle $-b/2a$; donc la fonction g a une valeur interdite :

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

6) $a < 0$ et $\Delta < 0$: pour tout x réel, $f(x) < 0$; la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘		↗	0

EXERCICE 2 : a) La fonction h est définie lorsque $1 + x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ et lorsque $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \neq 0$; soit $x \geq -1$, $x \leq 1$ et $\sqrt{1+x} \neq \sqrt{1-x}$; d'où $1 + x \neq 1 - x$ ou $1 + x \neq x - 1$; d'où $x \neq 0$; ainsi h est définie sur $[-1\,;0[\, \cup\,]0\,;1]$.

b) En multipliant par la quantité conjuguée du numérateur, on obtient :

$$h(x) = \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} = \frac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x-2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x})} = \frac{2x}{2-2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

et en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur, on obtient : $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

c) On peut alors déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = -1$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = +\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0} h(x) = \lim\limits_{x\to0} 1+\sqrt{1-x^2} = 2$.