DEVOIR MAISON N° 3 TERMINALE S 3 (Les suites numériques)

EXERCICE 1 :

Soient a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$. On pose $u_0 = a + b$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = a + b - \dfrac{ab}{u_n}$.

1. On suppose $a = b$. a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 en fonction de a .
b) Conjecturer la forme générale de u_n en fonction de a . Démontrer par récurrence ce dernier résultat.
c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2. On suppose $a \neq b$. a) Montrer que $u_1 = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$ et $u_2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.
b) Conjecturer, dans le cas général, l'expression de u_n en fonction de puissances de a et de b . Démontrer par récurrence ce dernier résultat.
c) Si $|a| < |b|$, écrire u_n en fonction de $\dfrac{a}{b}$. Etudier la convergence de la suite (u_n) .
d) Si $|a| > |b|$, écrire u_n en fonction de $\dfrac{a}{b}$. Etudier la convergence de la suite (u_n) .

EXERCICE 2 : Comment doit-on choisir les trois côtés d'un triangle rectangle pour que les longueurs de ces trois côtés soient les termes consécutifs d'une suite géométrique ?

EXERCICE 3 : Soit un triangle équilatéral de côté c_1 . On trace le cercle inscrit dans ce triangle et on désigne son rayon par r_1 . Dans le cercle obtenu, on inscrit un triangle équilatéral et on désigne son côté par c_2 . On trace le cercle inscrit dans ce nouveau triangle et on désigne son rayon par r_2 . En itérant le procédé, on fait apparaître deux suites (c_n) et (r_n). 1. Calculer r_1 en fonction de c_1 , puis c_2 en fonction de c_1.
2. Calculer c_{n+1} en fonction de c_n puis r_{n+1} en fonction de r_n .
3. En déduire les expressions de c_n puis r_{n+1} en fonction de n et de c_1 .
4. Calculer la somme des aires des n premiers triangles. Cette somme a-t-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?
5. Même question pour la somme des aires des n premiers cercles.