EXERCICE 1 : 1. a) Si $a = b$, alors $u_0 = 2a$, $u_1 = 2a - \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{3}{2}a$, $u_2 = \dfrac{4}{3}a$, $u_3 = \dfrac{5}{4}a$.

b) On peut conjecturer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}a$. Montrons par récurrence ce dernier résultat :

C'est vrai pour $n = 1$ (cf question a)) ; supposons que, pour un certain n, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}a$; et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{n+3}{n+2}a$:

On sait que $u_{n+1} = 2a - \dfrac{a^2}{u_n} = 2a - \dfrac{a^2}{\dfrac{n+2}{n+1}a} = 2a - \dfrac{n+1}{n+2}a = \dfrac{n+3}{n+2}a$; la récurrence est démontrée, donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}a$.

c) La limite de la suite (u_n) : On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

2. a) On a $u_0 = (a+b)\dfrac{a-b}{a-b} = \dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ et $u_1 = a+b-\dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \dfrac{(a^2+ab+b^2)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

b) On peut conjecturer que $u_n = \dfrac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}$. Montrons par récurrence ce dernier résultat : C'est vrai pour $n = 1$ (cf question a)) ; supposons que, pour un certain n, $u_n = \dfrac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}$; et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{a^{n+3}-b^{n+3}}{a^{n+2}-b^{n+2}}$:

On sait que $u_{n+1} = a+b-\dfrac{ab}{u_n} = a+b-\dfrac{ab}{\dfrac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}} = \dfrac{(a+b)(a^{n+2}-b^{n+2})-ab(a^{n+1}-b^{n+1})}{a^{n+2}-b^{n+2}} = \dfrac{a^{n+3}-b^{n+3}}{a^{n+2}-b^{n+2}}$; la récurrence est démontrée, donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}}$.

c) Si $0 < |a| < |b|$, alors $u_n = b\dfrac{\left(a/b\right)^{n+2}-1}{\left(a/b\right)^{n+1}-1}$ .Comme $-1 < \dfrac{a}{b} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$.

d) Si $|a| > |b| > 0$, alors $u_n = a\dfrac{1-\left(b/a\right)^{n+2}}{1-\left(b/a\right)^{n+1}}$ .Comme $-1 < \dfrac{b}{a} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

EXERCICE 2 : Appelons u_0 , u_1 , u_2 les longueurs des trois côtés du triangle rectangle ; la suite (u_n) est géométrique de raison $q > 0$, avec $u_1 = qu_0$ et $u_2 = q^2 u_0$; de plus, l'hypoténuse du triangle étant le côté de plus grande longueur, étudions deux cas : a) si $q > 1$, l'hypoténuse est u_2 et alors $u_0^2 + u_1^2 = u_2^2$, soit $1 + q^2 = q^4$; posons $Q = q^2$; Q est solution de $1 + Q = Q^2$, soit $Q^2 - Q - 1 = 0$; les solutions sont $Q_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (donc impossible) et $Q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, d'où $q_1 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

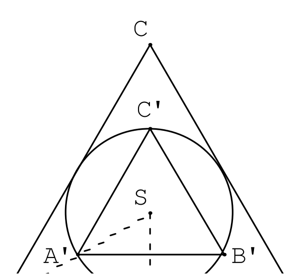
b) si $q < 1$, l'hypoténuse est u_0 et alors $u_2^2 + u_1^2 = u_0^2$, soit $q^4 + q^2 = 1$; posons $Q = q^2$; Q est solution de $Q^2 + Q - 1 = 0$; les solutions sont $Q_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (donc impossible) et $Q_4 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, d'où $q_2 = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Les trois côtés du triangle rectangle peuvent être 1 , q_1 , q_1^2 ou 1, q_2 , q_2^2.

EXERCICE 3 : 1. Appelons ABC le triangle équilatéral de côté c_1 . Le cercle inscrit dans ce triangle a pour centre S et pour rayon SP ; alors S est aussi le centre de gravité et P le milieu d'un côté, par exemple [AB] ; en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle SPA rectangle en P, on a $SP^2 = SA^2 - AP^2 = \left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}c_1\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}c_1\right)^2 = \dfrac{1}{12}c_1^2$;

donc $r_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}c_1$. Dans un cercle de rayon r, le triangle équilatéral inscrit a pour côté $c = r\sqrt{3}$. En effet, $c^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(120°) = 2r^2(1-(-1/2)) = 3r^2$ (Al Kashi)

Donc $c_2 = r_1\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}c_1$.



2. Par des calculs analogues, on obtient $c_{n+1} = \frac{1}{2} c_n$, et $r_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} c_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$.

3. Donc les suites (c_n) et (r_n) sont des suites géométriques de raison ½ et de premier terme c_1 et $r_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} c_1$.

4. Les suites (c_n^2) et (r_n^2) sont des suites géométriques de raison ¼ et de premier terme c_1^2 et $r_1^2 = \frac{1}{12} c_1^2$. La somme des aires des n premiers triangles = $c_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + c_2^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots + c_n^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} c_1^2 \times \frac{1-\left(1/4\right)^n}{1-1/4} = \frac{\sqrt{3}}{3} c_1^2 (1-\left(1/4\right)^n)$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, cette somme a une limite lorsque n tend vers + ∞ qui est $\frac{\sqrt{3}}{3} c_1^2$.

5. La somme des aires des n premiers cercles = $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots + \pi r_n^2 = \pi r_1^2 \times \frac{1-\left(1/4\right)^n}{1-1/4} = \frac{4\pi}{3} r_1^2 (1-\left(1/4\right)^n)$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, cette somme a une limite lorsque n tend vers + ∞ qui est $\frac{4\pi}{3} r_1^2 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{12} c_1^2 = \frac{\pi}{9} c_1^2$.