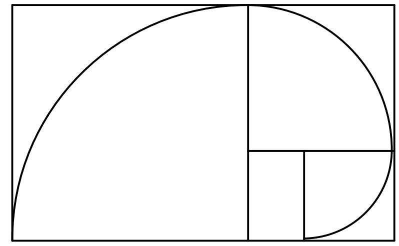
DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE S 3



EXERCICE 1

A. Quelques propriétés du nombre d'or :

On considère un rectangle de longueur L et de largeur λ tel que, si l'on découpe ce rectangle en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu a pour longueur λ et pour largeur λ_1 tel que $\frac{L}{l} = \frac{l}{l_1}$ (le rapport des dimensions est conservé). On redécoupe ce petit rectangle en un carré et un rectangle de dimensions λ_1 et λ_2 .

1. Montrer que $\frac{l_1}{l_2} = \frac{l}{l_1}$. On pose $\phi = \frac{l_1}{l_2} = \frac{l}{l_1}$. Montrer que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (appelé nombre d'or) ;

2. Ecrire ϕ^2 sous la forme $a_2\phi + b_2$ où a_2 et b_2 sont des entiers ; écrire ϕ^3 sous la forme $a_3\phi + b_3$ où a_3 et b_3 sont des entiers.

B. Etude d'une suite :

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, ϕ^n s'écrit $a_n\phi + b_n$, où $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ et $b_n = a_{n-1}$.

2. On considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite ainsi que leurs valeurs approchées au millième.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

4. Dans un repère orthonormé (unité : 5 cm) , utiliser la représentation graphique de la fonction f et la droite (d) d'équation $y = x$ pour représenter les cinq premiers termes de la suite (v_n).

5. Quelle conjecture peut-on faire sur la suite (v_n) ?

6. Quelle serait la limite de la suite (v_n) ?

C. Longueur d'une courbe :

1. Dans le rectangle de la partie A, montrer que $\lambda_1 = \frac{1}{\phi}$ et que $\lambda_2 = \frac{1}{\phi^2}$.

2. On construit les quarts de cercle dans chaque carré, formant ainsi une courbe.
On note c_n la longueur du n-ième quart de cercle. Calculer c_1 et c_2 .

3. Déterminer c_n puis la longueur de la courbe sur les n premiers quarts de cercle : $c_1 + c_2 + \dots + c_n$.

4. Quelle est la limite de cette somme ? Quelle est l'interprétation géométrique de cette limite ?

EXERCICE 2

On considère deux nombres réels a et b strictement positifs tels que $a < b$.

On appelle moyenne arithmétique de a et b , le nombre $\frac{a+b}{2}$; on appelle moyenne harmonique de a et b , le nombre $\frac{2ab}{a+b}$. On considère alors les suites (a_n) et (b_n) telles que $a_0 = a$ et pour tout entier naturel n non nul , a_n est la moyenne arithmétique de a_{n-1} et de b_{n-1} ; $b_0 = b$ et pour tout entier naturel n non nul , b_n est la moyenne harmonique de a_{n-1} et de b_{n-1} .

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < a_n < b_n$, et que $\frac{b_n - a_n}{a_n + b_n} < 1$.

2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

3. On admet que la limite de (a_n) est $\sqrt{ab}$. Déterminer un encadrement de $\sqrt{15}$ à 10^{-5} près par deux rationnels.