CORRECTION DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE S 3

EXERCICE 1 :A. 1. Dans le rectangle , on a $l = l_1 + l_2$ et $L = l + l_1$. D' où $\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{l-l_1} = \frac{1}{\frac{l-l_1}{l_1}} = \frac{1}{\frac{l}{l_1}-1} =$

$\frac{1}{\frac{L}{l}-1} = \frac{1}{\frac{L-l}{l}} = \frac{1}{\frac{l_1}{l}} = \frac{l}{l_1} = \phi$. On a vu que $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{\frac{l}{l_1}-1}$, donc ϕ est solution de l' équation

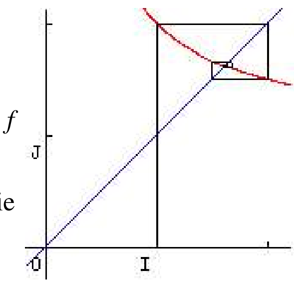
$\phi = \frac{1}{\phi-1}$; soit $\phi^2 - \phi - 1 = 0$; les solutions de cette équation sont $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; comme ϕ est positif (comme quotient de deux longueurs), donc $\phi = \phi_1$.

2. On obtient $\phi^2 = \phi + 1$, et $\phi^3 = \phi^2 \times \phi = (\phi + 1)\phi = 2\phi + 1$.

B. 1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\phi^n = a_n\phi + b_n$, où $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ et $b_n = a_{n-1}$: c' est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$ en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Supposons que la propriété soit vraie pour un certain n, montrons que c' est vraie pour $n + 1$: $\phi^{n+1} = (a_n\phi + b_n)\phi = a_n\phi^2 + b_n\phi = (a_n + b_n)\phi + a_n$, et $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n$. Donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n non nul.

2. On obtient $v_1 = \frac{a_2}{a_1} = 1$, $v_2 = \frac{a_3}{a_2} = 2$, $v_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}$, $v_4 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3}$, $v_5 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}$.

3. $v_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{v_n}$, donc, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.



4. Dans un repère orthonormé (unité : 5 cm) , voici la représentation graphique de la fonction f et la droite (d) d'équation $y = x$ pour représenter les cinq premiers termes de la suite :

5. On peut conjecturer que la suite (v_n) converge vers le réel l positif solution de l' équation $f(x) = x$.

6. La limite de la suite (v_n) est solution de $x = 1 + \frac{1}{x}$, soit $x^2 - x - 1 = 0$. D'après la partie A, la solution positive de cette équation est ϕ, donc la limite de cette suite est ϕ.

C. 1. Si $l = 1$, on a $\frac{l}{l_1} = \phi$, soit $l_1 = \frac{1}{\phi}$; de plus $\frac{l_1}{l_2} = \phi$, d' où $l_2 = \frac{1}{\phi^2}$. On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $l_n = \frac{1}{\phi^n}$.

2. $c_1 = \frac{1}{4} 2\pi l = \frac{\pi}{2}$, et $c_2 = \frac{1}{4} 2\pi l_1 = \frac{\pi}{2\phi}$.

3. $c_n = = \pi \frac{l_{n-1}}{2} = \frac{\pi}{2\phi^{n-1}}$; la suite (c_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{\phi}$ et de premier terme $c_1 = \frac{\pi}{2}$; la longueur de la courbe sur les n premiers quarts de cercle est donc : $c_1 + c_2 + \ldots + c_n =$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\pi}{2\phi^{k-1}} = \frac{\pi}{2} \frac{1-\frac{1}{\phi^n}}{1-\frac{1}{\phi}} = \frac{\pi\phi}{2(\phi-1)} \left(1-\frac{1}{\phi^n}\right) .$$

4. Comme $\phi \approx 1{,}618 > 1$, $\frac{1}{\phi^n}$ converge vers 0 et la limite de cette somme est $\frac{\pi\phi}{2(\phi-1)} = \frac{\pi(1+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{\pi(3+\sqrt{5})}{4}$. L'interprétation géométrique de cette limite: elle corre spond à la longueur de la courbe construite avec une infinité d'arcs de cercles de plus en plus petits !

EXERCICE 2 : 1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < a_n < b_n$, et que $\frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} < 1$: comme a et b sont strictement positifs et que $a < b$, on a $0 < a_0 < b_0$, et $\frac{b_0 - a_0}{b_0 + a_0} < 1$, car $b_0 - a_0 < b_0 + a_0$; supposons ces propriétés vraies pour un certain n et montrons qu'elles sont vraies pour $n + 1$: $a_{n+1} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} > 0$;

$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{4 a_n b_n - (a_n + b_n)^2}{2(a_n + b_n)} = \frac{-(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} < 0$, donc $a_{n+1} < b_{n+1}$. De plus, pour tous réels u et v strictement positifs tels que $u < v$, on a $\frac{v-u}{v+u} < 1$, donc $\frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_{n+1} + a_{n+1}} < 1$. Ainsi les propriétés sont démontrées pour tout n .

Montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes :

montrons que la suite (a_n) est croissante : $a_{n+1} - a_n = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} - a_n = \frac{2 a_n b_n - a_n^2 - a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n (b_n - a_n)}{a_n + b_n} > 0$ d'après la question précédente ; ainsi $a_{n+1} > a_n$ et la suite (a_n) est croissante.

montrons que la suite (b_n) est décroissante : $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 2$ d'après la question précédente ; ainsi $b_{n+1} < b_n$ et la suite (b_n) est décroissante. $b_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(a_{n-1} + b_{n-1})} < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $b_n - a_n < \frac{b_0 - a_0}{2^n}$: c'est vrai pour $n = 1$ d'après la ligne précédente; supposons la propriété vraie pour un certain n, montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$:

$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{b_n - a_n}{2} < \frac{1}{2} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$; donc c'est vraie pour tout entier n. De plus, la limite de $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$ est égale à 0 car il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]0; 1[$. Ainsi, en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$; donc les suites sont adjacentes.

On peut en déduire qu'elle converge vers la même limite l .

3. On a $w_{n+1} = a_{n+1} b_{n+1} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} \times \frac{a_n + b_n}{2} = a_n b_n = w_n$. Donc la suite (w_n) est constante et $w_n = a_0 b_0 = ab$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n^2 = ab$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \sqrt{ab}$.

On obtient $a_1 < a_2 < a_3 < ... < \sqrt{ab} < ... < b_3 < b_2 < b_1$; ainsi on obtient un encadrement de $\sqrt{15}$ en prenant $a = 3$ et $b = 5$ et les premiers termes des suites (a_n) et (b_n) jusqu'à ce que $b_n - a_n < 10^{-5}$:

$a_1 = \frac{15}{4}$; $b_1 = 4$; $a_2 = \frac{120}{31}$; $b_2 = \frac{31}{8}$; $a_3 = \frac{7440}{1921}$; $b_3 = \frac{1921}{496}$ et $b_3 - a_3 < 10^{-5}$, donc l'encadrement cherché est $\frac{7440}{1921} < \sqrt{15} < \frac{1921}{496}$.