CORRECTION DEVOIR MAISON N° 7 TERMINALE S 3

1. On a $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x$ = 0 , et $\lim_{x\to 0}(5x^2-4x+1)$ = 1, donc $\lim_{x\to 0} f(x)$ = 1.
Comme $\lim_{x\to 0} f(x)$ = 1 = *f*(0), alors la fonction *f* est continue en 0.
2. Pour *x* > 0, on peut écrire *f(x)* = $x^2(5-2\,lnx-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})$; $\lim_{x\to+\infty} \ln x$ = +∞ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ = $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}$ = 0 , donc

$\lim_{x\to+\infty}(5-2\ln x-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})$ = – ∞ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ = – ∞.

3. Pour étudier la dérivabilité de *f* en 0, on cherche à déterminer la limite: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ = $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-2x^2\ln x-4x}{x}$
= $\lim_{x\to 0}(5x-2x\ln x-4)$ = – 4 puisque $\lim_{x\to 0} x\ln x$ = 0. Donc la fonction *f* est dérivable en 0 et *f* '(0) = – 4.
4. Sur]0 ; +∞[, la fonction *f* est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur ce même intervalle,
donc *f* est dérivable sur [0 ; +∞[; sa dérivée *f '(x)* = 10*x* – 2(2*x* ln*x* + *x*² $\frac{1}{x}$) – 4 = 8*x* – 4*x* ln*x* – 4 .
5. Cette fonction *f '* est dérivable sur]0 ; +∞[comme somme et produit de fonctions qui le sont. Sa dérivée est
f ''(x) = 8 – 4(ln*x* + 1) = 4(1 – ln*x*).
6. *f ''(x)* est du signe de 1 – ln*x* qui s'annule pour *x* = *e* et est positif pour *x* supérieur à *e*. Donc la fonction *f '* est strictement croissante sur] *e* ; +∞ [et strictement décroisante sur]0 ; *e*].
7. *f '(x)* = 8*x* – 4*x* ln*x* – 4 = 4*x*(2 – ln*x*) – 4. D'où $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ = – ∞ puisque $\lim_{x\to+\infty} -\ln x$ = – ∞. La fonction *f '* est continue et strictement croissante de] *e* ; +∞ [dans] *f '*(*e*) ; $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ [=]4*e* – 4 ; – ∞[;
0 ∈]4*e* – 4 ; – ∞[, donc il a un unique antécédent *α* dans] *e* ; +∞ [par la fonction *f '* tel que *f* '(*α*) = 0; de même, la fonction *f '* est continue et strictement décroissante de]0 ; *e*] dans] *f* '(0) ; *f* '(*e*)] =] – 4 ; 4*e* – 4] ; or
0 ∈] – 4 ; 4*e* – 4] , donc il a un unique antécédent *β* dans]0 ; *e*] par la fonction *f '* tel que *f* '(*β*) = 0 ; donc l'équation *f '(x)* = 0 admet deux solutions *α* et *β* sur [0 ; +∞[; le signe de *f '(x)* est donnée par le tableau ci-dessous :

x	0		α		β		+∞
f '(x)		–			0 0	–	

Une valeur approchée de *α* et de *β* à 10^{-3} près à l'aide de la calculatrice : *α* ≈ 0,318 et *β* ≈ 6,305.
8. Les variations de la fonction *f* :

On a *f*(*α*) ≈ 0,4653 et *f*(*β*) ≈ 28,147.

x	0		α		β		+∞
f '(x)		–	0		0	–	
f(x)	1	↘	*f*(*α*)	↗	*f*(*β*)	↘	– ∞

9. Une équation des tangentes à la courbe C représentative de la fonction *f* en 1 et en 0.
En 1 : *y* = *f* '(1)(*x* – 1) + *f*(1) = 4*x* – 2 .
En 0 : *y* = *f* '(0)(*x* – 0) + *f*(0) = – 4*x* + 1.