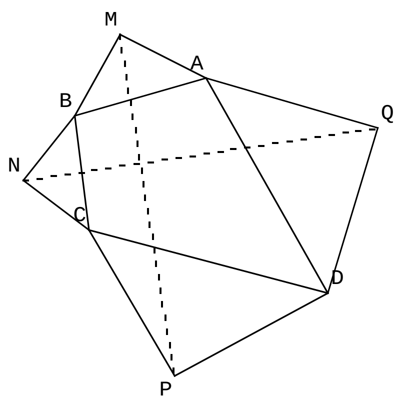
CORRECTION DEVOIR MAISON N° 8 TERMINALE S 3

EXERCICE 1



a) Faire une figure :

b) Soient a, b, c, d, m, n, p, q les affixes respectives des points A, B, C, D, M, N, P, Q. Le triangle AMB est isocèle rectangle en M et de sens direct donc MA = MB et ($\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MA}$) = $\frac{\pi}{2}$ [2π]; donc $|a-m| = |b-m|$ et $\arg\left(\frac{a-m}{b-m}\right) = \frac{\pi}{2}$ [2π]; donc le nombre complexe $\frac{a-m}{b-m}$ a son module égal à 1 et un argument égal à $\frac{\pi}{2}$, donc $\frac{a-m}{b-m} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, ainsi $a-m = i(b-m)$.

On peut aussi considérer la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A, d'où $a-m = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-m)$, soit $a-m = i(b-m)$.

On montre de la même manière que $b-n = i(c-n)$, $c-p = i(d-p)$, et $d-q = i(a-q)$.

On peut alors trouver $m = \frac{a-ib}{1-i}$, $n = \frac{b-ic}{1-i}$, $p = \frac{c-id}{1-i}$, $q = \frac{d-ia}{1-i}$;

ainsi $m-p = \frac{a-c+i(d-b)}{1-i}$ et $n-q = \frac{i(a-c)+b-d}{1-i} = \frac{i((a-c)-i(b-d))}{1-i} = \frac{-i((a-c)+i(d-b))}{1-i} = -i(m-p)$

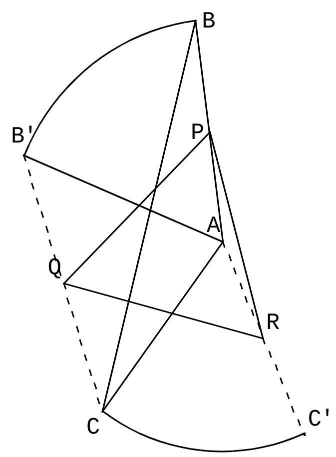
donc NQ = $|n-q| = |-i(m-p)| = |m-p|$ = MP et ($\overrightarrow{PM}$; $\overrightarrow{QN}$) = $\arg\left(\frac{n-q}{m-p}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ [2π]; donc les droites (MP) et (NQ) sont perpendiculaires et MP = NQ.

EXERCICE 2

1) On a $e^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2i\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2i\pi}{3}\right) - \left(\cos\left(\frac{i\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{i\pi}{3}\right)\right) = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1$.

Donc $e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}} - 1$.

2) a) Faire une figure :



b) Dans un repère orthonormé du plan d'origine A, les affixes des points A, B, C, B', C', P, Q, R sont respectivement 0, b, c, b', c', p, q, r . Comme B' et C' sont les images de B et C dans la rotation de centre A et d'angle + $\frac{\pi}{3}$, on a

$b' - 0 = e^{\frac{i\pi}{3}}(b-0)$, soit $b' = e^{\frac{i\pi}{3}} b$, et de même $c' = e^{\frac{i\pi}{3}} c$.

Les points P, Q et R étant les milieux respectifs des segments [AB], [B'C] et [C'A], on peut écrire $p = \frac{b}{2}$, $q = \frac{b'+c}{2} = \frac{be^{i\frac{\pi}{3}}+c}{2}$ et $r = \frac{c'}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}\frac{c}{2}$.

Ainsi $p-r = \frac{b-e^{i\frac{\pi}{3}}c}{2}$ et

$$q-r = \frac{be^{i\frac{\pi}{3}}+c-ce^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \frac{be^{i\frac{\pi}{3}}+c(1-e^{i\frac{\pi}{3}})}{2} = \frac{be^{i\frac{\pi}{3}}-c(e^{2i\frac{\pi}{3}})}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(b-ce^{i\frac{\pi}{3}})}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r).$$

Donc RQ = $|q-r| = |e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)| = |p-r|$ = RP et ($\overrightarrow{RP}$; $\overrightarrow{RQ}$) = $\arg\left(\frac{q-r}{p-r}\right) = \arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ [2π]; le triangle PQR a deux côtés de même longueur et un angle de 60°, donc il est équilatéral.