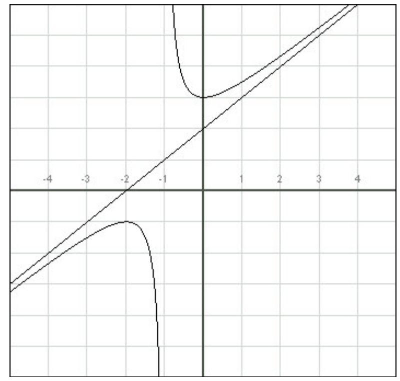
EXERCICE 1 (4 points)



On considère la fonction f définie par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+d}$,

où a, b, c, d sont des réels ; sa représentation graphique est la courbe C donnée ci –contre ; les droites (d) et (d') sont des asymptotes à C. Le point A(0 ; 3) est un point de la courbe C.
Déterminer les réels a, b, c, d à l'aide du graphique. Justifier les solutions.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{4x^2+3}$.
a) Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe C représentative de la fonction f .
b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
c) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
d) Déterminer les variations de la fonction f .
e) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C en $+\infty$.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$.
a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Déterminer les variations de la fonction f .
c) Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
d) Etudier la position relative de C et de T.

EXERCICE 4 (6 points)

A . Montrer que, pour tout réel $a \in [0 ; 1]$, on a $\sqrt{a} \geq a$.

B . On s'intéresse aux fonctions f vérifiant les quatre conditions suivantes :
1. la fonction f est continue sur [0 ; 1] ;
2. $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
3. la fonction f est strictement croissante sur [0 ; 1] ;
4. pour tout x de [0 ; 1], $f(x) \leq x$.

a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ satisfait aux conditions précédentes (on pourra utiliser le résultat de la partie A).
b) En déduire que, pour tout $k \in [0 ; 1]$, l'équation $g(x) = k$ a une unique solution dans [0 ; 1].
c) Résoudre cette équation lorsque $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
d) Cette fonction g est-elle dérivable en 1 ?
e) Trouver un polynôme du second degré P vérifiant les quatre conditions précédentes.

Question subsidiaire : La fonction j définie par $j(x) = 1 - \cos(\dfrac{\pi x}{2})$ vérifie-t-elle les quatre conditions ?