CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 2 TERMINALE S 3

EXERCICE 1 : 1. a) Le polynôme P est dérivable sur P et $P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ qui s'annule en – 1 et en 1. Donc P est strictement croissant sur $]-\infty ; -1]$ ainsi que sur $[1 ; +\infty[$, et est strictement décroissant sur $[-1; 1]$.
b) P est continu et strictement croissant de $]-\infty ; -1]$ dans $]-\infty ; -1]$, et $0 \notin]-\infty ; -1]$, donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty ; -1]$. P est continu et strictement décroissant de $]-1; 1[$ dans $]-5 ; -1[$, donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-1 ; 1[$. P est continu et strictement croissant de $]1 ; +\infty[$ dans $]-5 ; +\infty[$, et $0 \in]-5 ; +\infty[$, donc l'équation $P(x) = 0$ a une unique solution α dans $]1 ; +\infty[$. Donc l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur ¡ . Un encadrement de α à 0,01 près : $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$.
2. a) La fonction f est une fonction rationnelle ; la limite de f en $+\infty$ est la limite du rapport des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2 - 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 2x^3 + 3 = 5$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$.
b) La fonction f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition, ici sur I.
$f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2-1)-(2x^3+3)2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2xP(x)}{(x^2-1)^2}$. Le signe de f' est celui de $P(x)$ sur I qui est positif sur $[\alpha ; +\infty[$ et négatif sur $]-\infty ; \alpha[$.

D'où le tableau de variations :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

EXERCICE 2 : a) Pour tout entier naturel n, on a
$2 - \dfrac{5}{u_n+4} = \dfrac{2(u_n+4)-5}{u_n+4} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} = u_n$.
b) On considère la propriété (P_n) définie par : $0 \le u_n \le 2$.
Initialisation : (P_0) est vraie : $u_0 = 0$ et $0 \le 0 < 2$;
Hérédité : supposons (P_n) vraie pour un certain entier n et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $0 \le u_n \le 2$, d'où $4 \le u_n + 4 \le 6$, d'où $\dfrac{-5}{4} \le \dfrac{-5}{u_n+4} \le \dfrac{-5}{6}$, d'où $2-\dfrac{5}{4} \le 2-\dfrac{5}{u_n+4} \le 2-\dfrac{5}{6}$, d'où $0 < \dfrac{3}{4} \le u_{n+1} \le \dfrac{7}{6} < 2$; donc (P_{n+1}) est vraie ; ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $0 \le u_n \le 2$.
c) On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \dfrac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12} = \dfrac{u_n-1}{5u_n+15} = \dfrac{1}{5}v_n$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1/5 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+3} = \dfrac{-1}{3}$. e) Donc $v_n = \dfrac{-1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = \dfrac{-1}{3\times5^n}$ .La raison de la suite étant strictement compris entre 0 et 1, la limite de la suite (v_n) est 0. f) On a $(u_n+3)v_n = u_n - 1$, d'où $u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1$, d'où $u_n = \dfrac{-3v_n-1}{v_n-1} = \dfrac{\dfrac{1}{5^n}-1}{\dfrac{-1}{3\times5^n}-1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5^n} = 0$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. La suite (u_n) converge vers 1.

EXERCICE 3 : a) $u_1 = ½$, $u_2 = 2/3$, $u_3 = ¾$. b) Les quatre premiers termes de (u_n) sont égaux à ceux de (w_n).
c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$; l'initialisation a été faite à la question précédente. Supposons que, pour un certain entier n, $u_n = w_n$, et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$;
donc pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.
d) $u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1} = f(n)$ où la fonction est définie, dérivable (comme fonction rationnelle) sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$; donc la fonction f est strictement croissante sur , et par suite (u_n) est strictement croissante.
e) On a, pour tout entier naturel n, $0 \le n < n + 1$, d'où $0 \le \dfrac{n}{n+1} < 1$, donc la suite (u_n) est bornée par 0 et 1 .
f) $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\ldots\times\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. g) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.