DEVOIR SURVEILLE N° 4 TERMINALE S 3 ***Vendredi 19 novembre 2004***

EXERCICE 1 (5 points)

On considère les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$ et $z_2 = 1 - i$.

a) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et de z_2 .

b) Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique de $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et de $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.

EXERCICE 2 (5 points)

1. On considère le nombre complexe $z = 1 + i$.

a) Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z .

b) Trouver le plus petit entier naturel n tel que z^n soit un réel positif.

2. On considère le nombre complexe $z = x + iy$ où les réels x et y ne sont pas tous les deux nuls.

a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$ en fonction de x et de y .

b) Déterminer les nombres complexes z tels que $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$ soit imaginaire pur.

EXERCICE 3 (5 points)

1. On considère, pour tout nombre complexe z, le polynôme $P(z) = z^3 + 8$.

a) Calculer $P(-2)$ et $P(i)$.

b) Déterminer les réels a, b, c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l' équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On désigne par A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives :

$z_A = -2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = 1 - i\sqrt{3}$, $z_D = 2$.

a) Réaliser une figure et placer les points A, B, C et D (laisser les traits de construction).

b) Montrer que les quatre points sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 7$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = \dfrac{2u_n+v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$.

1. Soit (d_n) la suite définie par $d_n = u_n - v_n$ pour tout entier naturel n .

a) Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique à termes strictement positifs dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c) Que peut-on en déduire ?

2. Soit (s_n) la suite définie par $s_n = u_n + v_n$ pour tout entier naturel n .

a) Montrer que la suite (s_n) est une suite constante. Déterminer cette constante.

b) Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n) .