CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 3 TERMINALE S 3

EXERCICE 1: a) On calcule le module et un argument de z_1 : $|z_1| = \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{4})^2+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = \sqrt{\frac{8}{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posons arg(z_1) = θ_1 ; $\cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{6}}{4} * \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \frac{-\sqrt{2}}{4} * \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$; ainsi $\theta_1 = \frac{-\pi}{6}$ [2 π].

On calcule le module et un argument de z_2 : $|z_2| = \sqrt{(1^2+(-1)^2)} = \sqrt{2}$.

Posons arg(z_2) = θ_2 ; $\cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta_2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; ainsi $\theta_2 = \frac{-\pi}{4}$ [2 π].

La forme trigonométrique de $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cos $\frac{-\pi}{6}$ + $i$sin $\frac{-\pi}{6}$) et celle de $z_2 = \sqrt{2}$ (cos $\frac{-\pi}{4}$ + $i$sin $\frac{-\pi}{4}$).

b) $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4} * \frac{1}{1-i} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4} * \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{8} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

c) Le module de Z est égale à $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2}$ et un argument de Z est égale à arg(z_1) - arg(z_2) = $\frac{-\pi}{6} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ [2 π];

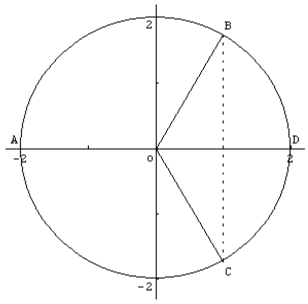
d' où $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\Re(Z)}{|Z|} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et de $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\Im(Z)}{|Z|} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 2 : 1. a) $\frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1 + i$.

b) On sait que $z^2 = (1 + i)^2 = 2i$ et que $i^2 = -1$, donc $z^4 = -4$ et $z^8 = 16$, donc le plus petit entier naturel n tel que z^n soit un réel positif est 8.

2. a) $\frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(x+iy)^2}{x-iy} = \frac{(x^2-y^2+i(2xy))(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x^3-3xy^2+i(-y^3+3x^2y)}{x^2+y^2} = \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y^3+3x^2y}{x^2+y^2}$.

b) $\frac{z^2}{\bar{z}}$ est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle c' est-à-dire si $\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} = 0$, soit $x^3 - 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2) = 0$, soit $x = 0$, ou $x^2 = 3y^2$, soit $x = y\sqrt{3}$ ou $x = -y\sqrt{3}$. Donc $z = ix$, $z = x + ix\sqrt{3}$ ou $z = x - ix\sqrt{3}$ avec x réel non nul .



EXERCICE 3 : 1. a) $P(-2) = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$ et $P(i) = i^3 + 8 = 8 - i$.

b) Comme P(-2) = 0, le polynôme P se factorise par $(z + 2)$; et $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ $= az3 + (2a + b)z^2 + (c + 2b)z + 2c$. Par identification, on trouve $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$.

Donc $P(z) = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$.

c) On peut alors résoudre, dans $\mathbb{C}$, l' équation P(z) = 0 : $z + 2 = 0$, soit $z = 2$,

ou $z^2 - 2z + 4 = 0$; $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$, donc les deux solutions sont complexes et conjuguées : $z_1 = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = 1+i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{2-i\sqrt{12}}{2} = 1-i\sqrt{3}$.

b) Ces quatre points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2, car OA = $|z_A| = 2$, OB = $|z_B| = 2$ ...

EXERCICE 4 : 1. a) On a $d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n-v_n}{3} = \frac{1}{3}d_n$, donc la suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $d_0 = u_0 - v_0 = 6$, donc $d_n = 6\,(\frac{1}{3})^n > 0$ puisque 6 et 3 sont strictement positifs.

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+v_n}{3} - u_n = \frac{-u_n+v_n}{3} = \frac{-d_n}{3} < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$ et (u_n) est strictement décroissante. Montrons que la suite (v_n) est croissante : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+2v_n}{3} - v_n = \frac{u_n-v_n}{3} = \frac{d_n}{3} > 0$, donc $v_{n+1} > v_n$ et (v_n) est strictement croissante. $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} d_n = 0$ car la raison de la suite (d_n) est strictement comprise entre 0 et 1. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c) On peut en déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l .

2. a) On a $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3} + \frac{u_n+2v_n}{3} = \frac{3u_n+3v_n}{3} = u_n + v_n = s_n$ pour tout entier naturel n. Donc la suite (s_n) est une suite constante $= s_0 = 8$.

b) Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = 8$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$, et donc $2l = 8$, d' où $l = 4$.

La limite des suites (u_n) et (v_n) est 4.