EXERCICE 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$. On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.
6. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.

Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

7. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.
8. Calculer $f\,'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^{x})$, $f\,'$ désignant la fonction dérivée de f .
9. En déduire le sens de variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

EXERCICE 2 (6 points)

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise; s'il est en retard, il prend le bus de ville, il lui en coûte 1,5 euro.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 1/5, s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 1/20.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'événement : « l'employé est en retard le jour n ».

On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$, événement contraire de R_n . On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence:

a) Déterminer les probabilités conditionnelles : $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b) Déterminer $p(R_n \cap R_{n+1})$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n .

c) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n et q_n .

d) En déduire que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{20}p_n$.

2. Etude de la suite (p_n) :

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{-3}{20}$ et préciser son premier terme.

b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c) Etudier la convergence de la suite (p_n).

EXERCICE 3 (7 points)

Partie A: Soit h la fonction définie sur ℝ par $h(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1. Déterminer les limites de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variations de h puis dresser son tableau de variations sur ℝ.
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions dans ℝ, dont l'une dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α.
4. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
5. En déduire le signe de $h(x)$ sur ℝ et le présenter dans un tableau.

Partie B: On considère les fonctions f et g définies sur ℝ par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ et C_f et C_g leur courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)h(x)}{x^2+x+1}$ où h est la fonction étudiée dans la partie A.
2. A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g .
4. Montrer que les courbes C_f et C_g ont la même tangente au point d'abscisse 0.