CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 5 TERMINALE S 3

EXERCICE 1 : 1. Résultat du cours: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}$ = nombre dérivé de la fonction ln en 1 = 1.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ = 1 en posant $h = e^x$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} h = 0$.

3. Pour tout réel x , $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) = e^{-x}\ln(e^x(1+e^{-x})) = e^{-x}(\ln(e^x)+\ln(1+e^{-x})) = xe^{-x}+e^{-x}(\ln(1+e^{-x})) = \dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x}) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. Ainsi la courbe C admet deux asymptotes horizontales: une en $-\infty$ d'équation $y = 1$, l'autre en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

6. La fonction g est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont; $g'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{1+t} = \dfrac{-t}{(1+t)^2}$.
Cette dérivée est du signe de $-t$ soit négatif sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

7. De plus $g(0) = 0$ qui est le maximum de g sur $[0 ; +\infty[$, donc $g(t) \le 0$ lorsque $t > 0$.

8. $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x)+e^{-x}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) = -e^{-x}(g(e^x))$. On a vu que pour $t > 0$, $g(t) \le 0$, donc pour tout x réel, $e^x > 0$, donc $g(e^x) \le 0$, et $f'(x) \le 0$.

9. La fonction f est donc décroissante de 1 vers 0.

EXERCICE 2

1. a) $p_{R_n}(R_{n+1})$ = probabilité que l'employé soit en retard le jour n+1, sachant qu'il était en retard la veille = 1/20.
$p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ = probabilité que l'employé soit en retard le jour n+1, sachant qu'il n'était pas en retard la veille = 1/5.

b) $p(R_n \cap R_{n+1}) = p_{R_n}(R_{n+1})\ p(R_n) = \dfrac{1}{20} p_n$, et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})\ p(\overline{R_n}) = \dfrac{1}{5} q_n$.

c) En utilisant la formule des probabilités totales, $p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = \dfrac{1}{20} p_n + \dfrac{1}{5} q_n$.

d) Comme $q_n = 1 - p_n$, on a $p_{n+1} = \dfrac{1}{20} p_n + \dfrac{1}{5}(1 - p_n) = \dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{20} p_n$.

2. a) $v_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{4}{23} = \dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{20} p_n - \dfrac{4}{23} = \dfrac{3}{115}-\dfrac{3}{20} p_n = \dfrac{-3}{20}\left(p_n - \dfrac{4}{23}\right) = \dfrac{-3}{20} v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{-3}{20}$ et son premier terme est $v_1 = p_1 - \dfrac{4}{23} = \dfrac{-4}{23}$.

b) Donc $v_n = \dfrac{-4}{23}\left(\dfrac{-3}{20}\right)^{n-1}$ et $p_n = v_n + \dfrac{4}{23} = \dfrac{4}{23}\left(1 - \left(\dfrac{-3}{20}\right)^{n-1}\right)$.

c) La raison de la suite (v_n) : $0 < \dfrac{-3}{20} < 1$, donc la limite de (v_n) est 0; ainsi la suite (p_n) converge vers $\dfrac{4}{23}$.

EXERCICE 3 : 1. A. 1. Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.
Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. $h'(x) = (2x + 1)e^{-x} + (x^2 + x + 1)(-e^{-x}) = (x - x^2)(e^{-x})$ est du signe de $x - x^2$; d'où le tableau de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3/e-1	$\searrow$	-1

3. Sur $]-\infty ; 1[$, la fonction h atteint son minimum 0 pour $x = 0$; première solution de l'équation $h(x) = 0$. Sur $[1; +\infty[$ la fonction h est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[3/e - 1; -1[$ et $0 \in [3/e - 1; -1[$, donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.

4. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.

5. $h(x)$ est positif sur $]-\infty ; \alpha[$ et négatif sur $[\alpha; +\infty[$.

B: 1. Pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (2x + 1)e^{-x} - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{(2x+1)(x^2+x+1)e^{-x}-(2x+1)}{x^2+x+1} = \dfrac{(2x+1)h(x)}{x^2+x+1}$. Cette quantité est du signe du numérateur, d'où le tableau:

x	$-\infty$		- ½		0		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f-g$		$-$	0	$+$			0	$-$	
position		C_f au-dessous			C_f au-dessus			C_f au-dessous	

3. La position relative des courbes C_f et C_g dans le tableau :

4. Tangente au point d'abscisse 0 des courbes C_f et C_g : $y = x + 1$.