DEVOIR SURVEILLE N° 6 **TERMINALES S 3** ***Vendredi 18 mars 2005***

EXERCICE 1 **(3 points)**

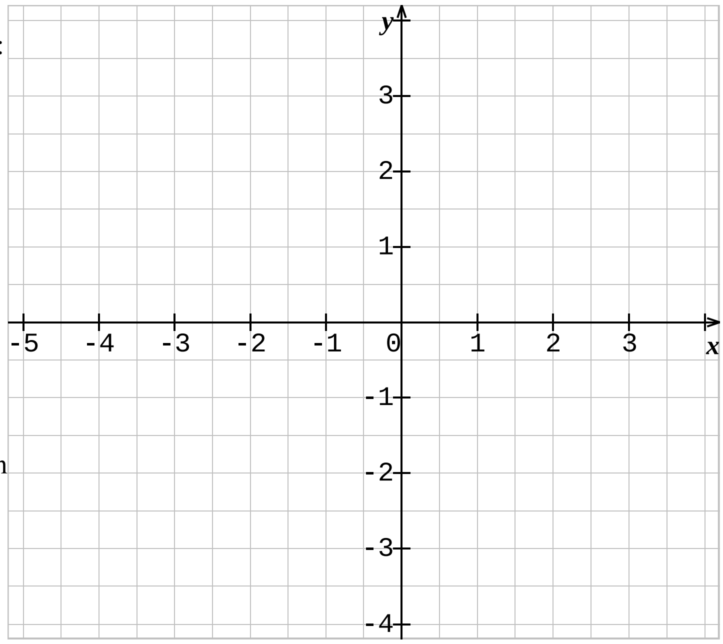
1. Démonstration de cours: Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \le k < n$, on a :
$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$, on a :
$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}$.

EXERCICE 2 **(8 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - 2{,}1e^{x} + 1{,}1\, x + 1{,}6$.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe repésentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$.
Reproduire l'allure de la courbe obtenue ci-contre:



2. D'après cette représentation graphique, que peut-on conjecturer :
(a) Sur les variations de la fonction f ?
(b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose d'étudier la fonction f.
a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2{,}1e^{x} + 1{,}1 \ge 0$.
b) Etudier les variations de la fonction f.
c) Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0{,}05 ; 0{,}15]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.
Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

5. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

EXERCICE 3 **(4 points)**

On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$ et $g(x) = \frac{2}{e^x+1}$.

1. Déterminer les limites de f et de g aux bornes de leur domaine de définition.
2. Déterminer une primitive de la fonction f.
3. Montrer que pour tout x réel, $f(x) + g(x) = 2$.
4. Calculer les intégrales $I = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\ln 2} g(x)\,dx$.

Question subsidiaire : Ecrire I et J sous la forme $\ln a$ où a est une fraction.

EXERCICE 4 **(5 points)**

Une urne contient dix boules indicernables au toucher, dont 7 sont rouges et 3 sont blanches. Un joueur tire simultanément quatre boules de cette urne.

1. On note les événements A: « Obtenir exactement trois boules rouges »; B « Obtenir au plus deux boules rouges ». Montrer que $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{1}{3}$.

2. Le joueur mise 5 euros, et effectue un tirage. S'il tire 4 boules rouges, il gagne 15 euros; s'il tire 3 boules rouges, il gagne 5 euros et sinon il ne gagne rien.
a) On note X le gain algébrique du joueur (son gain moins sa mise). Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Le jeu est-il équitable (espérance mathématique de X nulle) ?