EXERCICE 1 (8 points) (extrait de Bac 2005 Pondichéry)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). On considère les points A, B et C de coordonnées respectives (1; 0; 2), (1; 1; 4) et (– 1; 1; 1).
1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3; 4; – 2).
Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
a) Montrer que les plans sont sécants suivant une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
b) La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?
3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.
a) Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.
b) Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nul est le segment [IC] privé du point C.
c) Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 2 (8 points) (extrait de Bac 2004 La Réunion)

On désigne par f une fonction dérivable sur **R** et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :
(1) pour tout nombre réel x, $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur **R** .
1. a. Démontrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$.
b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
(4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de f .
3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
c. En déduire les fonctions u et v.
d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
4. a. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution dans **R**.
b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).
6. a. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique 2 cm), ainsi que la tangente à C au point d'abscisse 0.
b. Colorier le domaine du plan, ensemble des points M(x; y) vérifiant $0 \leq x \leq \ln 3$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
c. Déterminer l'aire de ce domaine en cm².