CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 9 TERMINALE S 3

EXERCICE 1 : 1. a) Pour montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : $\overrightarrow{AB}$ (0; 1; 2) et $\overrightarrow{AC}$ (-2; 1; -1) ; les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés.

b) Pour vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on calcule les produits scalaires : $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB}$ = 3×0 + 4×1 – 2×2 = 0 ; $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC}$ = 3×(-2) + 4×1 – 2×(-1) = 0 ; donc $\vec{n}$ est bien orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donnée par $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal, ici $\vec{n}$. De plus, le plan (ABC) contient le point A, d'où 3×1 + 4×0 – 2×2 + d = 0, soit d = 1. Un équation de (ABC) est : $3x + 4y - 2z + 1 = 0$.

2. a) Un vecteur normal à P_1 est : $\vec{n}_1$ (2; 1; 2) et un vecteur normal à P_2 est : $\vec{n}_2$ (1; -2; 6). Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les plans ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants suivant une droite D vérifiant le système :

$\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$ on tire $x = 2y - 6z$ et en remplaçant dans l'autre équation : $2(2y - 6z) + y + 2z + 1 = 0$, soit $5y - 10z + 1 = 0$, d'où $y = 2z - 1/5$ et $x = 2(2z - 1/5) - 6z = -2z - 2/5$. Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x=-2t-2/5 \\ y=2t-1/5 \\ z=t \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$.

b) On résout l'équation $3(-2t - 2/5) + 4(2t - 1/5) - 2t + 1 = 0$; on trouve $0t = 1$ qui n'a pas de solution, donc la droite D et le plan (ABC) sont parallèles.

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

a) La somme des coefficients 1, 2 et t égale $3 + t$, et comme t est un réel positif, cette somme est non nulle, donc le point G existe pour tout réel positif t.

Le point I a pour coordonnées $x_I = \dfrac{x_A+2x_B}{1+2} = 1$, $y_I = \dfrac{y_A+2y_B}{1+2} = \dfrac{2}{3}$, $z_I = \dfrac{z_A+2z_B}{1+2} = \dfrac{10}{3}$.

On a $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+t\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GI}$, d'où $3\overrightarrow{GI}+t\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, soit $\overrightarrow{IG} = \dfrac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.

b) Soit f la fonction définie sur [0; +∞[par $f(t) = \dfrac{t}{3+t}$. Cette fonction est dérivable comme fonction rationnelle, et $f'(t) = \dfrac{1}{(3+t)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur [0; +∞[; $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$; donc pour tout réel t positif, $0 \leq f(t) < 1$; comme $\overrightarrow{IG} = f(t)\,\overrightarrow{IC}$, alors l'ensemble des points G est le segment [IC] privé du point C.

c) Le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G si $\dfrac{t}{3+t} = \dfrac{1}{2}$, soit $2t = 3 + t$, soit $t = 3$.

EXERCICE 2 : 1. a. Supposons qu'il existe un réel α tel que $f'(\alpha) = 0$. Dans ce cas, avec la propriété (1), $(f'(\alpha))^2 - (f(\alpha))^2 = 1$, soit $(f(\alpha))^2 = -1$, ce qui est impossible. Donc pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

b. Pour $x = 0$, en utilisant la propriété (1), il vient $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$, soit $f(0) = 0$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), et sachant que $(u^2)' = 2uu'$, on obtient $2f'(x)f''(x) - 2f'(x)f(x) = 0$; soit $2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$; comme pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$ alors: pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.

3. a. On a $u(0) = f'(0) + f(0) = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1$.

b. Pour tout réel x, $u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) = u(x)$ et $v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) = -v(x)$.

c. Les fonctions u et v sont solutions d'équations différentielles : $y' = y$ pour u, et $y' = -y$ pour v.
Solutions de $y' = y$: $u(x) = Ce^x$. Comme $u(0) = 1$, alors C = 1, soit $u(x) = e^x$. Solutions de $y' = -y$: $v(x) = Ce^{-x}$. Comme $v(0) = 1$, alors C = 1, soit $v(x) = e^{-x}$.

d. Comme $u(x) = f'(x) + f(x)$ et $v(x) = f'(x) - f(x)$, en faisant la différence de ces deux égalités, on obtient $u(x) - v(x) = 2f(x)$; donc, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ É, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

b. $f'(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$ puisque pour tout réel x, $e^x > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

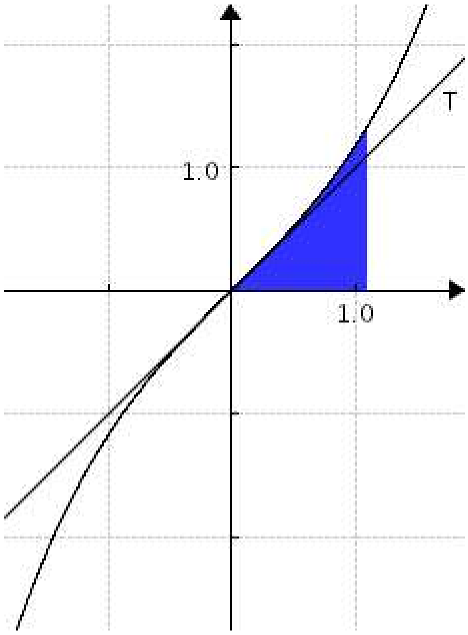
5. a. La fonction f est continue et strictement croissante de **R** dans **R**; ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution dans **R**.

b. Lorsque $m = 3$, on a $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$, soit $e^x - e^{-x} = 6$. On pose $X = e^x$; l'équation devient $X - 1/X = 6$,

soit $X^2 - 1 = 6X$, ou $X^2 - 6X - 1 = 0$; cette équation a deux solutions réelles : $X_1 = 3 + \sqrt{10}$ et $X_2 = 3 - \sqrt{10}$; X_2 est strictement négatif, d'où la solution de $f(x) = 3$ est $x_1 = \ln(3 + \sqrt{10}) \approx 1{,}82$.

6. a. Équation de la tangente à C en $x = 0$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

Tracé de la courbe C représentative de la fonction f :



b. Le domaine du plan, ensemble des points M(x; y) vérifiant $0 \le x \le \ln 3$ et $0 \le y \le f(x)$ est en bleu.

c. Une primitive de f est $F(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

L'aire, en unité d'aire, de ce domaine est égale à

$$\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = F(\ln 3) - F(0) = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} - 1 = \frac{2}{3} \text{ u.a.}$$

L'aire en cm² est égale à $\dfrac{2}{3} \times 4 = \dfrac{8}{3}$ cm².