

ENONCE : 1. On considère l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes définie par : $z^2 - 6z + 12 = 0$.

a) Résoudre l'équation (E) ; on note u et $\bar{u}$ ses solutions, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.

b) Calculer le module et un argument de u ; en déduire le module et un argument de $\bar{u}$.

2. a) On considère le nombre complexe $u - 4$; écrire ce nombre complexe sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

b) Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{u}{u-4}$; en déduire le module et un argument du nombre

complexe $\frac{\bar{u}}{u-4}$.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on note A le point d'affixe 4, B le point d'affixe 2 et C le point d'affixe 6 ; M et N sont les points d'affixes u et $\bar{u}$.

a) Démontrer que les points O, A, M et N sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Démontrer que les points B, C, M et N sont aussi sur un même cercle que l'on précisera.

c) Construire les deux cercles ainsi obtenus et les points M et N.

CORRIGE : 1. a) Le discriminant $\Delta = -12$ donc il y a deux solutions complexes : $u = \frac{6+2i\sqrt{3}}{2} = 3+i\sqrt{3}$ et

$\bar{u} = 3-i\sqrt{3}$. b) On a $|u| = |\bar{u}| = 2\sqrt{3}$; notons $\theta = \arg(u)$;

on a $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, d'où $\arg(u) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et $\arg(\bar{u}) = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

2. a) $u - 4 = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}))$.

b) $\left| \frac{u}{u-4} \right| = \frac{|u|}{|u-4|} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ et

$\arg\left(\frac{u}{u-4}\right) = \arg(u) - \arg(u-4) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Les points O, A, M, N sont sur le cercle de centre B et de rayon 2 :

$OB = BA = 2$; $BM = BN = |u-2| = 2$.

Les points B, C, M, N sont sur le cercle de centre A et de rayon 2 :

$AB = AC = 2$; $AM = AN = |u-4| = 2$.

