

ENONCE : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (d'unité graphique 2 cm), on considère le point A_0 d'affixe 2, le point A'_0 d'affixe $2i$ et le point A_1 milieu du segment $[A_0 A'_0]$. Plus généralement, si A_n est un point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n , et par A_{n+1} le milieu de $[A_n A'_n]$. On note r_n et θ_n le module et un argument de z_n .

1. a) Déterminer les affixes des points $A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3$. Placer ces points sur une figure.

b) Calculer r_0, r_1, r_2, r_3 et $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

2. a) Pour tout entier n , exprimer z_{n+1} en fonction de z_n ; en déduire z_n en fonction de n .

b) Etablir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de r_n quand n tend vers l'infini. Interpréter géométriquement ce résultat.

d) Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+8} .

3. Etablir que $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$. Après avoir exprimé $A_n A_{n+1}$ en fonction de n , déterminer, en fonction de n , la longueur l_n de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$. Déterminer la limite de l_n lorsque n tend vers l'infini.

CORRIGE : 1. a) L'affixe de $A_1 : z_1 = 1+i$; l'affixe de $A'_1 : z'_1 = iz_1 = -1+i$; l'affixe de $A_2 : z_2 = \frac{z_1 + z'_1}{2} = i$;

l'affixe de $A'_2 : z'_2 = iz_2 = -1$; l'affixe de $A_3 : z_3 = \frac{z_2 + z'_2}{2} = \frac{-1+i}{2}$. b) $r_0 = |z_0| = 2, r_1 = |z_1| = \sqrt{2}, r_2 = |z_2| = 1,$

$$r_3 = |z_3| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \theta_0 = 0 [2\pi], \theta_1 = \frac{\pi}{4} [2\pi], \theta_2 = \frac{\pi}{2} [2\pi], \theta_3 = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

2. a) $z_{n+1} = \frac{z_n + z'_n}{2} = \frac{z_n + iz_n}{2} = z_n \frac{(1+i)}{2}$; la suite des nombres complexes (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1+i}{2}$ et de premier terme $z_0 = 2$; donc $z_n = 2 \left(\frac{1+i}{2} \right)^n$.

b) On a $r_{n+1} = |z_{n+1}| = |z_n| \left| \frac{1+i}{2} \right| = r_n \times \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $r_0 = 2$;

donc $r_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$. On a $\theta_{n+1} = \text{Arg}(z_{n+1}) = \text{Arg}(z_n) + \text{Arg}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \theta_n + \frac{\pi}{4}$;

donc la suite (θ_n) est arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de premier terme $\theta_0 = 0$;

donc $\theta_n = n \frac{\pi}{4}$.

c) Comme $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$; ce qui signifie que la distance OA_n tend vers 0.

d) $z_{n+8} = r_{n+8} e^{i\theta_{n+8}} = r_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^8 e^{i(\theta_n + 8\frac{\pi}{4})} = z_n \times \frac{1}{16} e^{i2\pi} = \frac{1}{16} z_n$, donc $r_{n+8} = \frac{1}{16} r_n$ et $\theta_{n+8} = \theta_n$.

e) $A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left| \left(z_n - z_{n-1} \right) \left(\frac{1+i}{2} \right) \right| = |z_n - z_{n-1}| \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$. Soit $u_n = A_n A_{n+1}$; on a alors, pour tout entier $n \geq$

1, $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-1}$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $u_0 = A_0 A_1 = \sqrt{2}$; Ainsi

$A_n A_{n+1} = u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$. La longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ est la somme des longueurs $A_n A_{n+1}$; donc

$$l_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right). \text{ Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2(1 + \sqrt{2}).$$

