

ENONCE : a) On considère le nombre complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; écrire ω et ω^2 sous forme algébrique.

b) Montrer que $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et $\bar{\omega} = \omega^2$, où $\bar{\omega}$ désigne le conjugué de ω .

c) Montrer que $|\omega| = |1 + \omega|$; le complexe $\bar{\omega}$ vérifie-t-il la même égalité ?

d) On considère un nombre complexe z vérifiant la relation $|z| = |1 + z|$;

montrer que la partie réelle de z vérifie $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

e) On considère un nombre complexe $z \neq -1$ et de 0 vérifiant la relation $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(1 + z)$;
montrer que z est réel.

CORRIGE : a) On a $\omega = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\omega^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) On a $1 + \omega + \omega^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ et $\bar{\omega} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2$.

c) On a $|\omega| = 1$ et $|1 + \omega| = \left|1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$; comme $|\bar{\omega}| = |\omega|$ et $|\overline{1 + \omega}| = |1 + \bar{\omega}| = |1 + \omega|$ alors le conjugué vérifie aussi la relation.

d) On pose $z = a + ib$; si $|z| = |1 + z|$, on obtient (en passant au carré) $a^2 + b^2 = (1 + a)^2 + b^2$ et on trouve $a = -\frac{1}{2}$; donc la partie réelle de z vérifie $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

Question subsidiaire : Si $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(1 + z)$, alors $\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(1 + z) = 0$ soit $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{1 + z}\right) = 0$; or

$\frac{z}{1 + z} = \frac{a(1 + a) + b^2 + ib}{(a + 1)^2 + b^2}$ son argument est nul si sa partie imaginaire est nulle : donc $b = 0$ et donc $z = a$ et z est réel.