

ENONCE : Pour x et y réels, on pose : $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Déterminer les réels x et y tels que $\bar{z}z - 2z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; on note z_1 la solution de cette équation de partie réelle positive et z_2 l'autre. Déterminer les modules de z_1 et z_2 .

CORRIGE : On a $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2 + 2i$. D'où l'équation devient : $\bar{z}z - 2z = 2 + 2i$; soit

$x^2 + y^2 - 2(x + iy) = 2 + 2i$ soit $x^2 + y^2 - 2x = 2$ et $-2y = 2$; d'où $y = -1$ et $x^2 - 2x - 1 = 0$; $\Delta = 8 > 0$ donc

deux solutions : $x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$; on a $z_1 = 1 + \sqrt{2} - i$ et $z_2 = 1 - \sqrt{2} - i$. Le

module de z_1 est $|z_1| = |1 + \sqrt{2} - i| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ et le module de z_2 est $|z_2| = |1 - \sqrt{2} - i| = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.